令和３年度大学入学共通テスト　数学 I・数学 A 解答解説

GTS

実施日：2021/1/31　作成日：2021/2/3

第 1 問

〔１〕$a,\ b$ を定数とするとき, x についての不等式

$$|ax-b-7|<3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) $a=-3,\ b=-2$ とするとき, ① は

$$|-3x-5|<3$$

であるから $-3<-3x-5<3$ となり, これを解くと $-\dfrac{8}{3}<x<-\dfrac{2}{3}$ より, ① をみたす整数全体の集合を P とすると

$$P=\left\{\underline{\mathbf{-2}_{\text{アイ}}}x,\ \underline{\mathbf{-1}_{\text{ウエ}}}\right\}$$

となる。

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i) $b=1$ のとき, ① は

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}x-8\right|<3$$

であるから $-3<\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-8<3$ となり, これを解くと $7<5\sqrt{2}<x<11\sqrt{2}<15.6$ より, ① を満たす整数 x は $x=8,\ 9,\ 10,\ \cdots,15$ の $\underline{\mathbf{8}_{\text{オ}}}$ 個である。

(ii) ① を満たす整数が全部で 9 個であるような正の整数 b のうち, $b=2$ のとき $8.4<6\sqrt{2}<x<12\sqrt{2}<17$ より 8 個, $b=3$ のとき $9.9<7\sqrt{2}<x<13\sqrt{2}<18.5$ より 9 個となるので, 最小の b は $\underline{\mathbf{3}_{\text{カ}}}$

〔２〕

(1) 正弦定理により, $2R=\dfrac{\mathbf{8}_{\text{キ}}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$ である。よって, R が最小となるのは $\angle\mathrm{APB}=\underline{\mathbf{90}_{\text{クケ}}}^\circ$ の三角形である ($\because \sin 90^\circ=1$)。このとき, $R=\underline{\mathbf{4}_{\text{コ}}}$ である。

(2) 直線 AB と直線 ℓ との距離を h とする。直線 ℓ が円 C と共有点をもつ場合は, h が C の半径以下であるときだから, $h\leqq\underline{\mathbf{4}_{\text{サ}}}$ のときであり, 共有点をもたない場合は $h>4$ のときである。

(i) $h\leqq 4$ のとき

直線 ℓ が円 C と共有点をもつので, R が最小となる △ABP は, $h<4$ のとき, 点 P が円 C 上にあるので, <u>**直角三角形①**$_{\text{シ}}$</u> であり, $h=4$ のとき直角二等辺三角形である。

(ii) $h>4$ のとき

線分 AB の垂直二等分線を m とし, 直線 m と直線 ℓ との交点を $\mathrm{P_1}$ とする。直線 ℓ 上にあり点 $\mathrm{P_1}$ とは異なる点を $\mathrm{P_2}$ とするとき $\sin\angle\mathrm{AP_1B}$ と $\sin\angle\mathrm{AP_2B}$ の大小を考える。

$\triangle\mathrm{ABP_2}$ の外接円と直線 m との共有点のうち, 直線 AB に関して点 $\mathrm{P_2}$ と同じ側にある点を $\mathrm{P_3}$ とすると, 円周角の定理より, $\angle\mathrm{AP_3B}\underline{=①_{\text{ス}}}\angle\mathrm{AP_2B}$ である。また, $\angle\mathrm{AP_3B}<\angle\mathrm{AP_1B}<90^\circ$ より $\sin\angle\mathrm{AP_3B}\underline{<⓪_{\text{セ}}}\sin\angle\mathrm{AP_1B}$ である。このとき

$$(\triangle\mathrm{ABP_1}\text{ の外接円の半径})\underline{<⓪_{\text{オ}}}(\triangle\mathrm{ABP_2}\text{ の外接円の半径})$$

であり, R が最小となる △ABP は点 P が 点 $\mathrm{P_1}$ にあるときであるから, <u>**二等辺三角形③**$_{\text{タ}}$</u> である。

(3) $h=8$ のとき, $\triangle$ABP の外接円の半径 R が最小である場合について考える。このとき, $\triangle$APB は AB$=4$, AP$=$BP$=4\sqrt{5}$ の二等辺三角形になる。

したがって, $\cos\angle \mathrm{APB}=\dfrac{(4\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2-8^2}{2\cdot 4\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$ となるので, $\sin\angle\mathrm{APB}=\underline{\dfrac{\mathbf{4}_{チ}}{\mathbf{5}_{ツ}}}$ であり, 正弦定理より

$2R=\dfrac{8}{\frac{4}{5}}$ であるから, $R=\underline{\mathbf{=5}_{テ}}$ である。

第 2 問

〔1〕

(1) 1 皿あたりの価格と売り上げ数の和が表のどの場合も 400 となるので, 1 皿辺りの価格を x 円とおくと, 売り上げ数は

$$\underline{\mathbf{400}_{アイウ}}-x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と表される。

(2) 利益を y 円とおく。y を x の式で表すと, 売り上げ金額が $x(400-x)$ 円, 経費が $160(400-x)$ 円となるので,

$$y=x(400-x)-160(400-x)=-x^2+\underline{\mathbf{560}_{エオカ}}x-\underline{\mathbf{7}_{ツ}}\times 10000 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。

(3) ② を変形して $y=-(x-280)^2+78400-70000=-(x-280)^2+8400$ より, 利益が最大になるのは 1 皿あたりの価格が $\underline{\mathbf{280}_{クケコ}}$ 円のときであり, そのときの利益は $\underline{\mathbf{8400}_{サシスセ}}$ 円である。

(4) 利益が 7500 円以上となる 1 皿あたりの価格を考えると $-(x-280)^2+8400\geqq 7500$ より $-30\leqq x-280\leqq 30$ となるので, $250\leqq x\leqq 310$ であるから, 最も安い価格は $\underline{\mathbf{250}_{ソタチ}}$ 円となる。

〔2〕

(1) I 小学生数は 500 人以上 600 人以下に集中しており, 外国人数は 50 人以上 200 人以下に集中している。したがって, 小学生数の四分位範囲は, 外国人数の四分位範囲より小さいと考えられる。誤り。

II 旅券取得者数は 100 人以上 550 人以下に分布しており, 外国人数は 0 人以上 250 人以下に分布しているので, 旅券取得者数の範囲は, 外国人数の範囲より大きい。正しい。

III どちらかというと 旅券取得者数と小学生数の散布図が右下がりで, 旅券取得者数と外国人数の散布図が右上がりに見える。したがって, 旅券取得者数と小学生数の相関係数は, 旅券取得者数と外国人数の相関係数より小さいと考えられる。誤り。

以上より, 正しい組合せは **(I) 誤 (II) 正 (III) 誤 ⑤**$_{ツ}$ である。

(2)

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots x_kf_k)\\&=\frac{1}{n}[x_1f_1+(x_1+h)f_2+(x_1+2h)f_3+\cdots\{x_1+(k-1)h\}f_k]\\&=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_1f_2+x_1f_3+\cdots+x_1f_k)+\frac{1}{n}\{hf_2+2hf_3+\cdots+(k-1)hf_k\}\\&=\underline{\boldsymbol{x_1+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+\cdots+(k-1)f_k\}}\ ③_{テ}}\end{aligned}$$

平均値 $\overline{x}$ は

$$(100\times4+200\times25+300\times14+400\times3+500\times1)\div 47=11300\div 47\fallingdotseq 240.4$$

より, 小数点第 1 位を四捨五入すると $\underline{\mathbf{240}_{トナニ}}$ である。

(3) 分散 s^2 は $f_1+f_2+f_3+\cdots+f_k=n$ であるから

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\right\}\\&=\frac{1}{n}\left\{({x_1}^2f_1+{x_2}^2f_2+\cdots+{x_k}^2f_k)-2\overline{x}\times\underline{\boldsymbol{n\overline{x}}\,③_{ヌ}}+(\overline{x})^2\times\underline{\boldsymbol{n}\,⓪_{ネ}}\right\}\end{aligned}$$

と変形できるので

$$s^2=\frac{1}{n}({x_1}^2f_1+{x_2}^2f_2+\cdots+{x_k}^2f_k)-\underline{\boldsymbol{(\overline{x})^2}\ ⑥_{ノ}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

平均値 $\overline{x}=240$ の値と式 ① を用いると,

$$s^2=(100^2\times4+200^2\times25+300^2\times14+400^2\times3+500^2\times1)\div47-240^2\fallingdotseq64468-57600=6868$$

より, 分散 s^2 は $\underline{\mathbf{6900③}_{\text{ハ}}}$ である、

第 3 問

(1)

(i) 箱の中の 2 個の球がともに白球である確率は袋 A から白球, 袋 B から白球を取り出す確率であるから $\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_1}\times\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1}=\dfrac{1}{12}$ である。

よって, 少なくとも 1 個は赤球である確率は $1-\dfrac{1}{12}=\underline{\dfrac{\mathbf{11}_{\text{アイ}}}{\mathbf{12}_{\text{ウエ}}}}$ である。

(ii) 2 個のうち 2 個とも赤球である確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_1}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1}=\dfrac{6}{12}$ であるから, 2 個のうち 1 個だけが赤球である確率は $\dfrac{11}{12}-\dfrac{6}{12}=\dfrac{5}{12}$ である。

箱に赤球が 2 個あるとき, 箱から取り出された球が赤球である確率は $\dfrac{6}{12}\times\dfrac{2}{2}=\dfrac{12}{24}$, 箱に赤球が 1 個あるとき, 箱から取り出された球が赤球である確率は $\dfrac{5}{12}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{24}$

よって, 箱の中から球を 1 個取り出すとき, 取り出した球が赤球である確率は $\dfrac{12}{24}+\dfrac{5}{24}=\underline{\dfrac{\mathbf{17}_{\text{オカ}}}{\mathbf{24}_{\text{キク}}}}$ である。

取り出した球が赤球であったときに, それが B の袋に入っていたものである条件付き確率を考える。B の袋から取り出された赤球が箱から取り出される確率は, 箱に 2 個赤球があるとき $\dfrac{6}{12}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{24}$, 箱に 1 個 B から取り出された赤球があるとき $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{24}$ であるから, $\dfrac{6}{24}+\dfrac{3}{24}=\dfrac{9}{24}$ である。したがって, 求める確率は $\dfrac{9}{24}\div\dfrac{17}{24}=\underline{\dfrac{\mathbf{9}_{\text{ケ}}}{\mathbf{17}_{\text{コサ}}}}$ である。

(2)

(i) 箱の中の 4 個の球のうち, ちょうど 2 個が赤球である確率は, A から 1 個, B から 1 個ずつ赤球が取り出されている場合のみ考えればよいから $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{18}=\underline{\dfrac{\mathbf{1}_{\text{シ}}}{\mathbf{3}_{\text{ス}}}}$ である。また, 箱の中の 4 個の球のうち, ちょうど 3 個が赤球である確率は, A から 1 個, B から 2 個赤球が取り出されている場合と A から 2 個, B から 1 個赤球が取り出されている場合を考えればよいから $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{18}+\dfrac{3}{18}=\dfrac{9}{18}=\underline{\dfrac{\mathbf{1}_{\text{セ}}}{\mathbf{2}_{\text{ソ}}}}$ である。

(ii) 箱の中から 2 個同時に取り出すとき, どちらの球も赤球である確率は, 箱の中に 2 個赤球がある場合と 3 個赤球がある場合と 4 個赤球がある場合を考えて $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\dfrac{1}{6}=\underline{\dfrac{\mathbf{17}_{\text{タチ}}}{\mathbf{36}_{\text{ツテ}}}}$ である。また, 取り出した 2 個の球がどちらも赤玉であったときに, それらのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は, 2 個の球が同じ色である確率の余事象の確率であるから $\dfrac{17}{36}-\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1+1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)=\dfrac{17}{36}-\dfrac{5}{36}=\dfrac{12}{36}$ である。よって, 求める確率は $\dfrac{12}{36}\div\dfrac{17}{36}=\underline{\dfrac{\mathbf{12}_{\text{トナ}}}{\mathbf{17}_{\text{ニヌ}}}}$ である。

第 4 問 正の整数 m に対して

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ a\geqq b\geqq c\geqq s\geqq 0 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(1) $m=14$ のとき, ① を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$\left(\underline{\mathbf{3}_{\text{ア}}},\ \underline{\mathbf{2}_{\text{イ}}},\ \underline{\mathbf{1}_{\text{ウ}}},\ \underline{\mathbf{0}_{\text{エ}}}\right)$$

のただ一つである。

また, $m=28$ のとき, ① を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組の個数は $(a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 1,\ 1,\ 1),\ (4,\ 3,\ 2,\ 1),(3,\ 3,\ 3,\ 1)$ の $\underline{\mathbf{1}_{\text{セ}}}$ 個である。

(2) $a=2n+1$ とすると $a^2-1=(2n+1)^2-1=4n(n+1)$ となり, $n(n+1)$ が偶数であることより, a^2-1 は 8 の倍数である。よって, a^2-1 は h の倍数であるという条件を満たすすべての奇数 a で成り立つような最大の正の整数 は $h=\underline{\mathbf{8}_{\text{カ}}}$ である。

(3) $a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 の倍数ならば, $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 0 \pmod 8$ となる整数 $a,\ b,\ c,\ d$ はすべて偶数となる場合のみである。

$\because$ どれか 1 つだけが奇数であるとき $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 1,\ 5 \pmod 8$, どれか 2 つだけが奇数であるとき $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 2,\ 6 \pmod 8$, どれか 3 つだけが奇数であるとき $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 3,\ 7 \pmod 8$, 4 つとも奇数であるとき $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 4 \pmod 8$ となるので, どの場合も 8 で割ったときに割り切れない。

よって, 偶数であるものの個数は $\underline{\mathbf{4}_{キ}}$ 個である。

(4) m が 8 の倍数であるとき, (3) より, ① を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ を求めやすくなる。

例えば, $m=224$ のとき, ① を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は $224=16\cdot 14$ より $m=14$ のときの値を 4 倍して

$$\left(\underline{\mathbf{12}_{クケ}},\ \underline{\mathbf{8}_{コ}},\ \underline{\mathbf{4}_{サ}},\ \underline{\mathbf{0}_{シ}}\right)$$

のただ一つであることがわかる。

(5) 7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m のうち, ① を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組の個数が 3 個であるもののの個数を考える。

m は $896=7\cdot 128=28\cdot 32$ であるから, 28 に 4 をかけていったものの個数が求める個数となる。したがって,

$$28\cdot 1,\ 28\cdot 4,\ 28\cdot 16$$

求める個数は $\underline{\mathbf{3}_{ス}}$ 個であり, そのうち最大のものは $m=\underline{\mathbf{448}_{セソタ}}$ である。

第 5 問

(1) 円 O が点 S を通り, 半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円であることを示すには, OH= $\underline{\mathbf{OS}⑤_{ア}}$ が成り立つことを示せばよい。

△ZDG と △ZHS との関係, および △ZDC と △ZHO との関係に着目すると

DG : $\underline{\mathbf{HS}②_{イ}}$ = $\underline{\mathbf{ZD}⑥_{ウ}}$: $\underline{\mathbf{ZH}⑦_{エ}}$

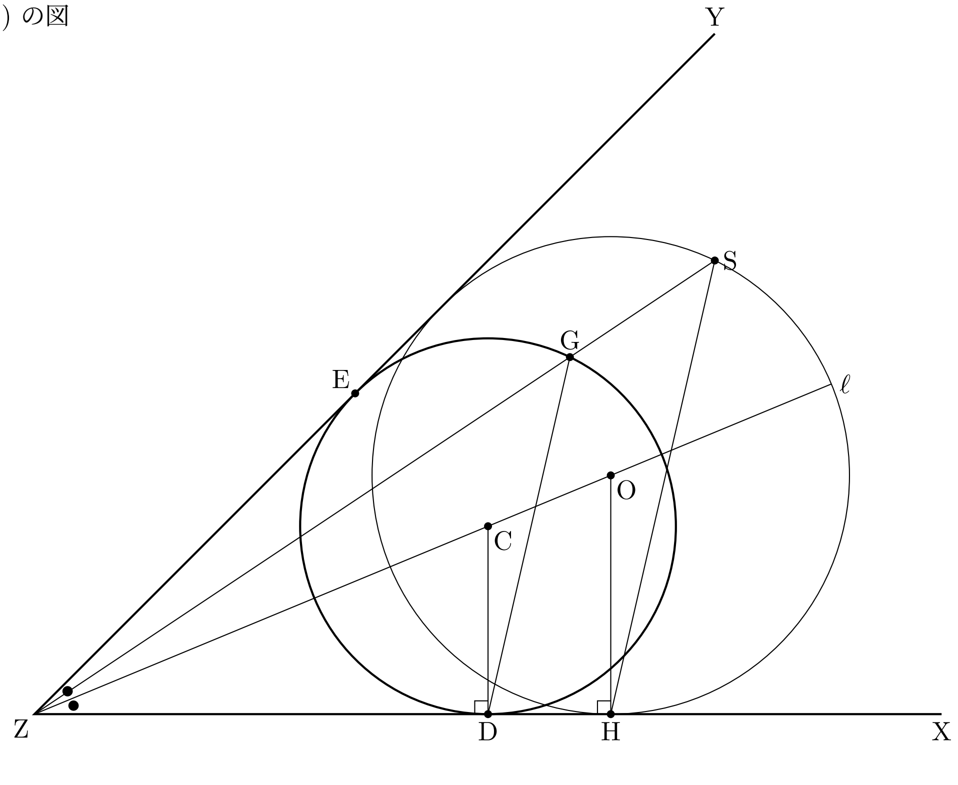
DC : $\underline{\mathbf{HS}①_{オ}}$ = ZD : ZH

であるから, DG : HS = DC : HO となる。

ここで, 3 点 S, O, H が一直線上にない場合は, ∠CDG = ∠$\underline{\mathbf{OHS}②_{カ}}$ であるので, △CDG と △OHS との関係に着目すると, △CDG ∽ △OHS であるから, CD=CG より OH=OS であることがわかる。

なお, 3 点 S, O, H が一直線上にある場合は, DG と HS はそれぞれ円 C, 円 O の直径になるので, DG= $\underline{\mathbf{2}_{キ}}$DC となり, DG : HS = DC : HO より OH=OS であることがわかる。

(1) の図



(2)　作図をした結果, 円 $\mathrm{O_1}$ の半径は 5, 円 $\mathrm{O_2}$ の半径は 3 であったとする。このとき, $\mathrm{IO_2 : JO_1 = ZO_2 : ZO_1}$ で, $\mathrm{IO_2} = 3$, $\mathrm{JO_1} = 5$, $\mathrm{O_1O_2} = 8$ であるから, $\mathrm{ZO_2} = 12$, $\mathrm{ZO_1} = 20$ である。よって, 三平方の定理より $\mathrm{ZI} = 3\sqrt{15}$, $\mathrm{ZJ} = 5\sqrt{15}$ であるから $\mathrm{IJ}= \underline{\mathbf{2}_{\text{ク}}}\sqrt{\underline{\mathbf{15}_{\text{ケコ}}}}$ である。さらに, 円 $\mathrm{O_1}$ と円 $\mathrm{O_2}$ の接点 S における共通接線と半直線 ZY との交点を L とし, 直線 LK と円 $\mathrm{O_1}$ との交点で点 K とは異なる点を M とすると, 方べきの定理より

$$\mathrm{LM \cdot LK = LS^2}$$

で, $\mathrm{LS = LJ = LI} = \dfrac{1}{2}\mathrm{IJ} = \sqrt{15}$ であるから

$$\mathrm{LM \cdot LK} = \underline{\mathbf{15}_{\text{サシ}}}$$

である。

また, $\mathrm{ZI}= \underline{\mathbf{3}_{\text{ス}}}\sqrt{\underline{\mathbf{15}_{\text{セソ}}}}$ であるので, 直線 LK と直線 ℓ との交点を N とし, 直線 LS と 半直線 ZX との交点を T とすると $\mathrm{ZL} = 4\sqrt{15}$, $\mathrm{ZK} = 5\sqrt{15}$ と二等分線の性質より $\mathrm{ZL : ZK = LN : NK}$ となるから,

$$\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}} = \frac{\underline{\mathbf{4}_{\text{タ}}}}{\underline{\mathbf{5}_{\text{チ}}}}$$

次に, $\mathrm{LN : NK = TN : NJ}$ と $\triangle\mathrm{LZN}$ において, メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{ZS}}{\mathrm{SN}} \cdot \frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TJ}} \cdot \frac{\mathrm{JL}}{\mathrm{LZ}} = 1$$

であるから, $\dfrac{\mathrm{ZS}}{\mathrm{SN}} = \dfrac{9}{1}$ となる。

ここで, ZS= 15 であるから, $\mathrm{SN}= \dfrac{\underline{\mathbf{5}_{\text{ツ}}}}{\underline{\mathbf{3}_{\text{テ}}}}$ である。

(2) の図