令和３年度大学入学共通テスト　数学 I・数学 A 解答解説

GTS

実施日：2021/1/17　作成日：2021/1/20

第 1 問

〔１〕

(1) ① に $c=1$ を代入して

$$2x^2+x-10=(\underline{\mathbf{2}_{\text{ア}}}x+\underline{\mathbf{5}_{\text{イ}}})(x-\underline{\mathbf{2}_{\text{ウ}}})$$

であるから, ① の解は $x=-\dfrac{5}{2},\ 2$ である。

(2) ② に $c=2$ を代入して

$$2x^2+5x-5=0$$

解の公式より ① の解は

$$x=\frac{-\underline{\mathbf{5}_{\text{エ}}}\pm\sqrt{\underline{\mathbf{65}_{\text{オカ}}}}}{\underline{\mathbf{4}_{\text{キ}}}}$$

であり, 大きい方の解を α とすると

$$\frac{5}{\alpha}=\frac{5\cdot4}{-5+\sqrt{65}}=\frac{20}{65-25}(5+\sqrt{65})=\frac{\underline{\mathbf{5}_{\text{ク}}}+\sqrt{\underline{\mathbf{65}_{\text{ケコ}}}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{サ}}}}$$

である。また, $m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は $8<\sqrt{65}<9$ であるから
$\dfrac{13}{2}-1<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}<7$ より $\underline{\mathbf{6}_{\text{シ}}}$ である。

(3) ① の解が異なる二つの有理数であるような正の整数 c の個数は
２次方程式の判別式を D とすると $D>0$ のときであるから
$D=(4c-3)^2-8(2c^2-c-11)=-16c+97>0$ より $c<\dfrac{97}{16}$ となる。
これを満たす整数 c は 6 個あり, このうち判別式が平方数になる場合は, $\underline{\mathbf{3}_{\text{ス}}}$ 個である。

〔２〕

(1) $\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{\underline{\mathbf{4}_{\text{セ}}}}{\underline{\mathbf{5}_{\text{ソ}}}}$ であり,
$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\sin A=\underline{\mathbf{12}_{\text{タチ}}},\ \triangle\mathrm{AID}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\sin(180^\circ-A)=\underline{\mathbf{12}_{\text{ツテ}}}$

(2) 正方形 BFGC, CHIA, ADEB の面積はそれぞれ $a^2,\ b^2,\ c^2$ となるので
$S_1=a^2,\ S_2=b^2,\ S_3=c^2$ となり, $S_1-S_2-S_3=a^2-b^2-c^2$ となる。

- $0^\circ<A<90^\circ$ のとき, $a^2<b^2+c^2$ であるから **負の値である**②$_{\text{ト}}$
- $A=90^\circ$ のとき, $a^2=b^2+c^2$ であるから **0 である**⓪$_{\text{ナ}}$
- $90^\circ<A<180^\circ$ のとき, $a^2>b^2+c^2$ であるから **正の値である**①$_{\text{ニ}}$

(3) $T_1=\dfrac{1}{2}bc\sin A,\ T_2=\dfrac{1}{2}ca\sin B,\ T_3=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ となる。
正弦定理より $\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$ であるから $T_1=T_2=T_3=\dfrac{abc}{4R}$
したがって, ③$_{\text{ヌ}}$

(4) $0^\circ<A<90^\circ$ のとき $\angle\mathrm{IAD}>90^\circ$ であるから ID $>$ ②$_{\text{ネ}}$ BC であり,
正弦定理より ($\triangle$AID の外接円の半径) $>$ ②$_{\text{ノ}}$ ($\triangle$ABC の外接円の半径)

であるから, 外接円の半径が最も小さい三角形は
$0° < A < B < C < 90°$ のとき, 3頂角の外角はどれも鈍角であるから, ID > BC かつ EF > BC かつ GH > BC となり, BC が一番小さくなるので, △ABC⓪$_{ハ}$ のとき外接円の半径が最小となる。
$0° < A < B < 90° < C$ のとき, ∠GCH が鋭角となるから, ID > GH かつ EF > GH である。また, △ABC と △CGH において, AB > GH となるので, △CGH⓪$_{ヒ}$ のとき外接円の半径が最小となる。

第 2 問

〔1〕

(1) ストライドの単位が (m/歩)、ピッチの単位が (歩/秒) であるから, ストライド × ピッチ の単位は (m/秒) となる。
したがって, 1 秒あたりの進む距離すなわち平均速度は, x と z を用いて $\boldsymbol{xz}$②$_{ア}$ (m/秒) と表される。
これより, タイムと, ストライド, ピッチの関係は

$$\text{タイム} = \frac{100}{xz} \cdots\cdots ①$$

と表されるので, xz が最大になるときにタイムが最もよくなる。

(2) ストライド x とピッチ z の関係が $z = ax + \frac{b}{5}$ で表されると仮定すると, 表より

$$\begin{cases} 4.60 = 2.10a + \dfrac{b}{5} \\ 4.50 = 2.15a + \dfrac{b}{5} \end{cases}$$

となるので, これを解くと $a = \mathbf{-2}_{イウ}$, $b = \mathbf{44}_{エオ}$ となり

$$z = -2x + \frac{44}{5} \cdots\cdots ②$$

と表される。
② が太郎さんのストライドの最大値 2.40 とピッチの最大値 4.80 まで成り立つと仮定すると, ② に $z = 4.8$ を代入すると $x = \mathbf{2.00}_{カキク}$ となるので, x の値の範囲は次のようになる。

$$2.00 \leqq x \leqq 2.40$$

$y = xz$ とおく。② を $y = xz$ に代入することにより, y を x の関数として表すことができる。すなわち

$$y = x\left(-2x + \frac{44}{5}\right) = -2x^2 + \frac{44}{5}x = -2\left(x - \frac{22}{10}\right) + \frac{968}{100}$$

となるので, y の値が最大となるのは $x = \mathbf{2.20}_{ケコサ}$ のときである。よって, 太郎さんのタイムが最もよくなるのは, ストライドが 2.20 のときであり, このとき, ピッチは $\mathbf{4.40}_{シスセ}$ である。また, このときの太郎さんのタイムは, ① に $x = 2.20$, $z = 4.40$ を代入して $y = 9.68$ となるから $\frac{100}{9.68} = 10.33\cdots$ となるので, ③$_{ソ}$ である。

〔2〕

(1) ⓪ 第 1 次産業の就業者数割合の箱の幅は, 2000 年度までは, 後の時点になるにしたがって減少しているので, 正しい。
① 第 1 次産業の就業者数割合について, 左側のひげの長さと右側のひげの長さは, 必ずしも左側の方が長いわけではないので, 正しくない。
② 第 2 次産業の就業者数割合の中央値（箱の中の太線）は, 1990 年以降, 後の時点になるにしたがって減少しているので, 正しい。
③ 第 2 次産業の就業者数割合の第１四分位数（箱の左端）は, 年度によって増加したり, 減少したりしているので, 正しくない。
④ 第 3 次産業の就業者数割合の第３四分位数（箱の右端）は, 後の時点になるにしたがって増加しているので, 正しい。

⑤ 第 2 次産業の就業者数割合の最小値（左側のひげの左端）は, 後の時点になるにしたがって増加しているので, 正しい。

よって, 正しくないものは ①$_{タ}$ と ③$_{チ}$ である。

(2) ⓪ 箱ひげ図の両端とヒストグラムの両端を比較すると, 1990 年度のヒストグラムである。

① 箱ひげ図の両端とヒストグラムの両端を比較すると, 1985 年度のヒストグラムである。

② 箱ひげ図の両端とヒストグラムの両端を比較すると, 2000 年度のヒストグラムである。

③ 箱ひげ図の両端とヒストグラムの両端を比較すると, 1980 年度のヒストグラムである。

④ 箱ひげ図の両端とヒストグラムの両端を比較すると, 1995 年度のヒストグラムである。

よって, 1985 年におけるグラフは ①$_{ツ}$ で, 1995 年度におけるグラフは ④$_{テ}$ である。

(3) (I) 都道府県別の第 1 次産業の就業者数割合と第 2 次産業の就業者数割合の間の相関関係は 2015 年の方が散らばっているので, 弱くなっている。正しくない。

(II) 都道府県別の第 2 次産業の就業者数割合と第 3 次産業の就業者数割合の間の相関関係は 1975 年の方が散らばっているので, 強くなっている。正しい。

(III) 都道府県別の第 1 次産業の就業者数割合と第 2 次産業の就業者数割合の間の相関関係は 2015 年の方が散らばっているので, 弱くなっている。正しくない。

よって, (I), (II), (III) の正誤の組合せとして正しいものは ⑤$_{ト}$ である。

(4) 男性の就業者数と女性の就業者数を合計すると就業者数の全体となるので, 男性の就業者数の割合が多いところは女性の就業者数の割合が少ない。つまり, 図 4 の散布図を上下反転させたものが求めたい散布図になるはずなので, ②$_{ナ}$ である。

第 3 問

(1)

(i) 箱 A において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{3}_{ア}}{\mathbf{8}_{イ}}$ ……①

箱 B において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\mathbf{4}_{ウ}}{\mathbf{9}_{エ}}$ ……②

(ii) $P(A\cap W) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$, $P(B\cap W) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{9} = \frac{4}{18}$ となるので,

$P(W) = P(A\cap W) + P(B\cap W) = \frac{3}{16} + \frac{4}{18} = \frac{59}{144}$ である。

$P_W(A) = \frac{P(A\cap W)}{P(W)} = \frac{3}{16}\times\frac{144}{49} = \frac{\mathbf{27}_{オカ}}{\mathbf{59}_{キク}}$ となる。

また, $P_W(B) = 1 - P_W(A) = 1 - \frac{27}{59} = \frac{\mathbf{32}_{ケコ}}{\mathbf{59}_{サシ}}$

(2) $P_W(A) : P_W(B) = 27 : 32$ で, ① : ② $= \frac{3}{8} : \frac{4}{9} = 27 : 32$ となるので,

$P_W(A)$ と $P_W(B)$ の **比**③$_{ス}$ は, ① の確率と ② の確率の比に等しい。

(3) 箱 A において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{3}{8}$, 箱 B において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{4}{9}$, 箱 C において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{27}{64}$ であるから, これらの確率の比は 216 : 256 : 243 となる。

箱 A が選ばれる事象を A, 箱 B が選ばれる事象を B, 箱 C が選ばれる事象を C, 3 回中ちょうど 1 回当たる事象を W とすると,

事実（＊）より, $P_W(A) : P_W(B) : P_W(C) = 216 : 256 : 243$ となる。

$P(W) = 216 + 256 + 243 = 715$ であるから, $P_W(A) = \frac{\mathbf{216}_{セスタ}}{\mathbf{715}_{チツテ}}$ である。

(4) 箱 A において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{3}{8}$, 箱 B において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{4}{9}$, 箱 C において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{27}{64}$, 箱 D において, 3 回中ちょうど 1 回当たる確率は $\frac{48}{125}$ であるから, これらの確率の比は 27000 : 32000 : 30375 : 27648 となる (整数比を計算しなくても, 小数に直して $0.375 : 0.\dot{4} : 0.421875 : 0.384$ から大小を比較してもよい)。

よって, 可能性が高い方から順に並べると **B**, **C**, **D**, **A**⑧$_{ト}$ である。

第 4 問 (1) 5 回のうち, n 回偶数の目が出たとすると, $5-n$ 回奇数の目が出るので, $5n - 3(5-n) = 1$ を解いて $n = 2$ となる。

したがって, 偶数の目が $\mathbf{2}_{ア}$ 回, 奇数の目が $\mathbf{3}_{イ}$ 回出れば, 点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができる。

(2)

$$5x-3y=8\cdots\cdots①$$

のすべての整数解 $x,\ y$ は, k を整数として

$$x=2\times 8+\underline{\mathbf{3}_{\text{ウ}}}k,\ y=3\times 8+\underline{\mathbf{5}_{\text{エ}}}k$$

と表される。① の整数解 $x,\ y$ の中で $0\leqq y<5$ を満たすものは, $k=-4$ のときで

$$x=\underline{\mathbf{4}_{\text{オ}}},\ y=\underline{\mathbf{4}_{\text{カ}}}$$

である。したがって, さいころを $\underline{\mathbf{8}_{\text{キ}}}$ 回投げて, 偶数の目が 4 回, 奇数の目が 4 回出れば, 点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。

(3)

$$5x-3y=-7$$

の整数解も時計回りで P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができるので, この整数解の 1 つを求めると

$$x=1,\ y=4$$

がある。したがって（*）に注意すると, 偶数の目が $\underline{\mathbf{1}_{\text{ク}}}$ 回, 奇数の目が $\underline{\mathbf{4}_{\text{ケ}}}$ 回出れば, サイコロを投げる回数が $\underline{\mathbf{5}_{\text{コ}}}$ 回で, 点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。このとき, $5<8$ である。

(4) 選択肢が $\mathrm{P}_{10}\sim\mathrm{P}_{14}$ だけなので, その点だけ考える。

［i］点 P_{10} について, $5x-3y=10$ または $5x-3y=-5$ の正の整数解を考えればよい。
$x+y$ が最小となるのは $x=2,\ y=0$ のときであるから最小回数は 2 回である。

［ii］点 P_{11} について, $5x-3y=11$ または $5x-3y=-4$ の正の整数解を考えればよい。
$x+y$ が最小となるのは $x=1,\ y=3$ のときであるから最小回数は 4 回である。

［iii］点 P_{12} について, $5x-3y=12$ または $5x-3y=-3$ の正の整数解を考えればよい。
$x+y$ が最小となるのは $x=0,\ y=1$ のときであるから最小回数は 1 回である。

［iv］点 P_{13} について, $5x-3y=13$ または $5x-3y=-2$ の正の整数解を考えればよい。
$x+y$ が最小となるのは $x=2,\ y=4$ のときであるから最小回数は 6 回である。

［v］点 P_{14} について, $5x-3y=14$ または $5x-3y=-1$ の正の整数解を考えればよい。
$x+y$ が最小となるのは $x=0,\ y=2$ のときであるから最小回数は 2 回である。

［i］～［iv］より最小回数が最も大きいのは点 $\underline{\mathbf{P}_{\mathbf{13}}③_{\text{サ}}}$ であり, その最小回数は $\underline{\mathbf{6}_{\text{シ}}}$ 回である。

第 5 問 三角形の角の二等分線の性質より, $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:5$ であるから

$$\mathrm{BD}=\frac{\underline{\mathbf{3}_{\text{ア}}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{イ}}}}$$

三平方の定理より $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2$ であるから

$$\mathrm{AD}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{45}{4}=\frac{\underline{\mathbf{3}_{\text{ウ}}}\sqrt{\underline{\mathbf{5}_{\text{エ}}}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{オ}}}}$$

$\triangle\mathrm{AEC}$ は AC が外接円の直径となることより $\angle\mathrm{AEC}=90^\circ$ の直角三角形であり, 三平方の定理より $\mathrm{AE}^2+\mathrm{CE}^2=\mathrm{AC}^2$ すなわち $\mathrm{CE}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{AE}^2$
また, $\triangle\mathrm{CED}$ の直角三角形であるから, 三平方の定理より $\mathrm{DE}^2+\mathrm{CE}^2=\mathrm{CD}^2$ すなわち $\mathrm{CE}^2=\mathrm{CD}^2-\mathrm{DE}^2$
ここで, CD$=\dfrac{5}{2}$, $\mathrm{DE}=\mathrm{AE}-\mathrm{AD}$ であるから

$$25-\mathrm{AE}^2=\frac{25}{4}-\left(\mathrm{AE}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

これを解いて, AE$=\underline{\mathbf{2}_{\text{カ}}}\sqrt{\underline{\mathbf{5}_{\text{キ}}}}$ である。

点 P から辺 AB, AC 上の接点に引いた直線は, 円の接線の性質より, それぞれ辺 AB, AC と垂直に交わる。したがって, 角の二等分線の性質より, 点 P は角 A の二等分線上にある。

このとき, $\mathrm{AD}:\mathrm{AP}=\mathrm{DB}:r$ であるから $\frac{3}{2}\sqrt{5}:\mathrm{AP}=\frac{3}{2}:r$ より AP$=\sqrt{\underline{\mathbf{5}_{ク}}}r$

また, AC と PF の交点を X とおくと, △AXP は直角三角形であるから, AO$=\sqrt{(\sqrt{5}r)^2-r^2}=2r$

よって, $\mathrm{AX}=\mathrm{XF}=2r$ となる。同様に考えて, XC$=2r$ であり, AC が外接円 O の直径であることより, O と X は一致する。

したがって, $\mathrm{PG}=\mathrm{GF}-r=\mathrm{AC}-r=\underline{\mathbf{5}_{ケ}}-r$

よって, $4r=5$ より, $r=\dfrac{\mathbf{5}_{コ}}{\underline{\mathbf{4}_{サ}}}$

(方べきの定理を使わなくても r は求められる)

内接円 Q の半径を r とすると $\frac{1}{2}r(3+4+5)=\frac{1}{2}3\cdot 4$ であるから $r=\underline{\mathbf{1}_{シ}}$ で,

$\mathrm{AQ}:\mathrm{AP}=1:\frac{5}{2}$ であるから AQ$=\sqrt{\underline{\mathbf{5}_{ス}}}$ である。また $\mathrm{AH}=\mathrm{AO}=\dfrac{\mathbf{5}_{セ}}{\underline{\mathbf{2}_{ソ}}}$ である。

以上から

(a) 点 Q から辺 AB に垂線 QI を下ろす。△AIQ が直角三角形であることより, $\mathrm{AI}=\sqrt{\mathrm{AQ}^2-\mathrm{QI}^2}\sqrt{5}-1=2$

よって, IH$=\frac{1}{2}$ で, △QIH も直角三角形であるから, $\mathrm{QH}=\sqrt{\mathrm{QI}^2+\mathrm{IH}^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

したがって, PQ$=\frac{\sqrt{5}}{4}$ であることより, $\mathrm{QH}^2+\mathrm{PQ}^2=\frac{5}{16}+\frac{5}{4}=\frac{25}{16}=\mathrm{PH}^2$ であるから, △PQH は直角三角形である。

以上より, $\angle\mathrm{DQH}=\angle\mathrm{DBH}=90^\circ$ で, 点 H は 3 点 B, D, Q を通る円の周上にある。

(b) (1) より $\angle\mathrm{PQH}=90^\circ$ で $\angle\mathrm{EBH}>\angle\mathrm{DBH}=90^\circ$ であるから, 点 H は 3 点 B, E, Q を通る円の周上にない。

したがって,(a) は正しく, (b) は誤りであるから, $\underline{①_{タ}}$ である。

図