令和３年度大学入学共通テスト　数学 II・数学 B 解答解説

GTS

実施日：2021/1/31　作成日：2021/2/5

第 1 問

〔１〕

(1) $\log_{10} 10 = \underline{\mathbf{1}_{ア}}$ である。また, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 15$ をそれぞれ $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ を用いて表すと

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = \underline{\mathbf{-}_{イ}} \log_{10} 2 + \underline{\mathbf{1}_{ウ}}$$

$$\log_{10} 15 = \log_{10}(3 \times 5) = \underline{\mathbf{-}_{エ}} \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \underline{\mathbf{1}_{オ}}$$

(2) $\log_{10} 15 = -\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 1 = -0.3010 + 0.4771 + 1 = 1.1761$ であるから, $\log_{10} 15^{20}$ は $1.1761 \times 20 = 23.522$ より

$$\underline{\mathbf{23}_{カキ}} < \log_{10} 15^{20} < 23 + 1$$

を満たす。よって, 15^{20} は $\underline{\mathbf{24}_{クケ}}$ 桁の数である。

$\log_{10} 15^{20}$ の小数部分は $\log_{10} 15^{20} - 23 = 0.522$ であり, $\log_{10} 3 < 0.522 < 0.6020 = \log_{10} 4$ より

$$\log_{10} \underline{\mathbf{3}_{コ}} < \log_{10} 15^{20} - 23 < \log_{10}(3+1)$$

が成り立つので, 15^{20} の最高位の数字は $\underline{\mathbf{3}_{サ}}$ である。

〔２〕

$$s = \cos\theta + \cos\alpha + \cos\beta,\ t = \sin\theta + \sin\alpha + \sin\beta(\text{ただし}, 0 \leqq \theta < \alpha < \beta < 2\pi)$$

(1) $\triangle$PQR が正三角形のとき, 原点 O は $\triangle$PQR の外心かつ内心かつ重心となるので, $\angle\mathrm{POQ} = \angle\mathrm{QOR} = \angle\mathrm{ROP} = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ である。

よって, α, β を θ で表すと

$$\alpha = \theta + \frac{\underline{\mathbf{2}_{シ}}}{3}\pi,\ \beta = \theta + \frac{\underline{\mathbf{4}_{ス}}}{3}\pi$$

であり, 加法定理により

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi - \sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi = \underline{\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta}\ ⑦_{セ}}$$

$$\sin\alpha = \sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi = \underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}\ ④_{ソ}}$$

である。同様に, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$, $\sin\beta = -\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ であるから, $s = t = \underline{\mathbf{0}_{タ}}$ である。

次に, $\triangle$PQR が PQ=PR となる二等辺三角形であるとき, 例えば点 P が直線 $y = x$ 上にあり, 点 Q, R が直線 $y = x$ に関して対称であるときを考える。このとき, $\theta = \frac{\pi}{4}$ である。また, $\alpha < \frac{5}{4}\pi$, β は $\frac{5}{4}\pi < \beta$ を満たし, 点 Q, R の座標について, $\sin\beta = \cos\alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$ が成り立つ。よって

$$s = t = \frac{\sqrt{\underline{\mathbf{2}_{チ}}}}{\underline{\mathbf{2}_{ツ}}} + \sin\alpha + \cos\alpha$$

である。

ここで, 三角関数の合成により

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\underline{\mathbf{2}_{テ}}}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{\underline{\mathbf{4}_{ア}}}\right)$$

で, $\alpha=\dfrac{11}{12}\pi$ のとき $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。
したがって

$$\alpha=\frac{\mathbf{11}_{\text{ナニ}}}{12}\pi,\ \beta=\frac{\mathbf{19}_{\text{ヌネ}}}{12}\pi$$

のとき, $s=t=0$ である。

(2) $s=t=0$ のとき, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ により, α と β について考えると

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(-\sin\alpha-\sin\beta)^2+(-\cos\alpha-\cos\beta)^2=2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$$

より

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\mathbf{-1}_{\text{ノハ}}}{\mathbf{2}_{\text{ヒ}}}$$

である。

同様に, θ と α について考えると

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\frac{-1}{2}$$

であるから, $\theta,\ \alpha,\beta$ の範囲に注意すると

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}$$

より

$$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{\mathbf{2}_{\text{フ}}}{\mathbf{3}_{\text{ヘ}}}\pi$$

という関係が得られる。

(3) これまでの考察を振り返ると, 考察 1 で

$$\triangle\mathrm{PQR}\text{ が正三角形である} \iff s=t=0$$

考察 2 で $\triangle\mathrm{PQR}$ が $\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}$ となる二等辺三角形で, $\alpha=\dfrac{11}{12}\pi,\ \beta=\dfrac{19}{12}\pi$ のとき, $\alpha=\dfrac{1}{4}\pi+\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta=\dfrac{1}{4}\pi+\dfrac{4}{3}\pi$ であるから, 正三角形である $\iff s=t=0$
考察 3 で

$$s=t=0\text{ のとき} \iff \beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi\text{であるから }\triangle\mathrm{PQR}\quad\text{は正三角形である}$$

となるので, **$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形ならば $s=t=0$ であり, $s=t=0$ ならば $\triangle\mathrm{PQR}$ は正三角形である。**0$_{\text{ホ}}$

第 2 問

〔1〕a を実数とし, $f(x)=(x-a)(x-2)$ とおく。また, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ とする。

(1) $a=1$ のとき, $F(x)$ は $x=\mathbf{2}_{\text{ア}}$ で極小になる。(※ グラフの概形から $x=1,\ 2$ で極値をとり, $x=1$ で極大になる。)

(2) $a=\mathbf{2}_{\text{イ}}$ のとき, $f(x)=(x-2)^2>0$ であるから, $F(X)$ はつねに増加する。また, $F(0)=\displaystyle\int_0^0 f(t)dt=\mathbf{0}_{\text{ウ}}$ であるから, $a=2$ のとき, $F(2)$ の値は **正**1$_{\text{エ}}$ である。

(3) $a>0$ とする。
b を実数とし, $G(x)=\displaystyle\int_b^x f(t)dt$ とおく。

関数 $y=G(x)$ のグラフは, $G(x)=F(x)-F(b)$ より, $y=F(x)$ のグラフを **y 軸**1$_{\text{オ}}$ 方向に $\boldsymbol{-F(b)}$3$_{\text{カ}}$ だけ平行移動したものと一致する。また, $G(x)$ は $x=\mathbf{2}_{\text{キ}}$ で極大になり, $x=\boldsymbol{a}_{\text{ク}}$ で極小になる。

$G(b)=\displaystyle\int_b^b f(t)dt=\mathbf{0}_{\text{ケ}}$ であるから, $b=2$ のとき, 曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は $x=2$ のとき極大値 0 となることから, $\mathbf{2}_{\text{コ}}$ 個である。

〔２〕$g(x)=|x|(x+1)$ とおく。

点 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ を通り, 傾きが c の直線を ℓ とする。 $x<0$ のとき, $g'(x)=(|x|(x+1))'=(-x^2-x)'=-2x-1$ より $g'(-1)=-2(-1)-1=2-1=-\underline{\mathbf{1}_{サ}}$ であるから, $0<c<1$ のとき, 曲線 $y=g(x)$ と直線 ℓ は 3 点で交わる。そのうちの 1 点は P であり, 残りの 2 点を点 P に近い方から順に Q, R とすると, 直線 ℓ は $y=cx+c$ であることより, 点 Q の x 座標は $\underline{\boldsymbol{-c}_{シス}}$ であり, 点 R の x 座標は $\underline{\boldsymbol{c}_{セ}}$ である。

また, $0<c<2$ のとき, 線分 PQ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とし, 線分 QR と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$S=\int_{-1}^{c}\left(-x^2-x-cx-c\right)dx=-\int_{-1}^{c}(x-c)\{(x-(-1)\}dx=\frac{\underline{\mathbf{-}_{ソ}}+\underline{\mathbf{3}_{タ}}-\underline{\mathbf{3}_{チ}}c+1}{\underline{\mathbf{6}_{ツ}}}$$

$$T=\int_{-c}^{0}(cx+cx^2+x)dx+\int_{c}^{0}(cx+c-x^2-x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(c+1)x^2+cx\right]_{-c}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(c-1)x^2+cx\right]_{0}^{c}$$

$$=\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{2}(c+1)c^2+c^2-\frac{1}{3}c^3+\frac{1}{2}(c-1)c^2+c^2$$

$$=\underline{c^{\mathbf{2}_{テ}}}$$

第 3 問

(1) 留学生全体における各コースに登録した留学生の割合は, それぞれ

初級コース：20 %, 中級コース：35 %, 上級コース：$\underline{\mathbf{45}_{アイ}}$%

であった。

この留学生の集団において, 一人を無作為に抽出したとき, その留学生が 1 週間に受講する日本語学習コースの授業の時間数を表す確率変数を X とする。 X の平均（期待値）は $0.2\times10+0.35\times8+0.45\times6=7.5=\dfrac{\underline{\mathbf{15}_{ウエ}}}{2}$ であり, X の分散は $0.2\times10^2+0.35\times8^2+0.45\times6^2-7.5^2=2.35=\dfrac{\underline{\mathbf{47}_{オカ}}}{20}$ である。

次に、留学生全体を母集団とし, a 人を無作為に抽出したとき, 初級コースに登録した人を表す確率変数を Y とすると, Y は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。このとき, Y の平均 $E(Y)$ は $n=a,\ p=0.2=\dfrac{1}{5}$ より

$$E(Y)=np=\frac{\underline{\boldsymbol{a}_{キ}}}{\underline{\mathbf{5}_{ク}}}$$

である。

また, 上級コースに登録した人数を表す確率変数を Z とすると, Z は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。 $Y,\ Z$ の標準偏差をそれぞれ $\sigma(Y),\ \sigma(Z)$ とすると $\sigma(Y)=\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}},\ \sigma(Z)=\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{20}\cdot\dfrac{11}{20}}$ より

$$\frac{\sigma(Z)}{\sigma(Y)}=\frac{\dfrac{2}{5}\sqrt{a}}{\dfrac{3\sqrt{11}}{20}\sqrt{3}}=\frac{\underline{\mathbf{3}_{ケ}}\sqrt{\underline{\mathbf{11}_{コサ}}}}{\underline{\mathbf{8}_{シ}}}$$

である。

ここで, $a=100$ としたとき, 無作為に抽出された留学生のうち, 初級コースに登録した留学生が 28 人以上となる確率を p とする。$a=100$ は十分大きいので, Y は $E(Y)=\dfrac{100}{5}=20,\ V(Y)=\dfrac{4}{25}\times100=10$ より, 標本平均を $\overline{Y}$ とすると, $Z=\dfrac{\overline{Y}-20}{4}$ は近似的に標準正規分布 $N(20,\ 10)$ に従う。このことを用いて p の近似値を求めると, $p=P(\overline{Y}>28)=(Z>2)=0.5-0.4772=0.0228=\underline{\mathbf{0.023}①_{ス}}$

(2) 母集団 σ^2 を 640 と仮定すると, 標本平均の標準偏差は $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{40}}=\sqrt{16}=\underline{\mathbf{4}_{セ}}$ となる。

調査の結果, 40 人の学習時間の平均値は 120 であった。標本平均が近似的に正規分布に従うとして, 母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間を $C_1\leqq m\leqq C_2$ とすると

$C_1=120-1.96\times4=120-7.84=\underline{\mathbf{112.16}_{ソタチツテ}}$

$C_2=120+1.96\times4=120+7.84=\underline{\mathbf{127.84}_{トナニヌネ}}$

である。

(3) 50 人の留学生を無作為に抽出し, 調査した結果, 学習時間の平均値は 120 であった。

母集団 σ^2 を 640 と仮定したとき, 母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間を $D_1 \leqq m \leqq D_2$ とすると, $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{50}} < 4$ であるから, $\underline{\boldsymbol{D_1 > C_1} \text{ かつ } \boldsymbol{D_2 < C_2} \ ②_{ノ}}$ が成り立つ。

一方, 母分散 σ^2 を 960 と仮定したとき, 母平均 m に対する信頼度 95 %の信頼区間を $E_1 \leqq m \leqq E_2$ とする。このとき, $D_2 - D_1 = E_2 - E1$ となるためには, この標本の大きさを n とすると $E_1 = 120 - 1.96 \times \dfrac{\sqrt{960}}{\sqrt{n}}$, $E_2 = 120 - 1.96 \times \dfrac{\sqrt{960}}{\sqrt{n}}$ であることより, $D_2 - D_1 = 3.82\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{50}} = 3.82\dfrac{\sqrt{960}}{\sqrt{n}}$ である。

よって, $n = \dfrac{960 \times 50}{640} = 75$ であるから, 標本の大きさを 50 の $\underline{\mathbf{1.5}_{ハヒ}}$ 倍にする必要がある。

第 4 問

〔1〕自然数 n に対して, $S_n = 5^n - 1$ とする。さらに, 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が S_n であるとする。このとき, $a_1 = S_1 = 5^1 - 1 = \underline{\mathbf{4}_{ア}}$ である。また, $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) = 5^{n-1}(5 - 1) = \underline{\mathbf{4}_{イ}} \cdot \underline{\mathbf{5}_{ア}}^{n-1}$$

である。この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

上で求めたことから, すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\frac{1 - \frac{1}{5}^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\underline{\mathbf{5}_{エ}}}{\underline{\mathbf{16}_{オカ}}}\left(1 - \underline{\mathbf{5}_{キ}}^{-n}\right)$$

が成り立つことが分かる。

〔2〕

(1) $(3n+1)$ 枚のタイルを用いた T_n 内の配置の総数を t_n とする。$n = 1$ のときは, $t_1 = \underline{\mathbf{4}_{ク}}$ である。

さらに, 2 以上の自然数 n に対して

$$t_n = Ar_n + Bt_{n-1}$$

が成り立つことが分かる。ただし, $A = \underline{\mathbf{1}_{ケ}}$, $B = \underline{\mathbf{1}_{コ}}$ である。

以上から, $t_2 = r_2 + t_1 = 11 + 4 = \underline{\mathbf{15}_{サシ}}$ であることが分かる。

同様に, 2 以上の自然数 n に対して

$$r_n = Cr_{n-1} + Dt_{n-1}$$

が成り立つことが分かる。ただし, $C = \underline{\mathbf{1}_{ス}}$, $D = \underline{\mathbf{2}_{セ}}$ である。

(2) 畳を縦の長さが 1 , 横の長さが 2 の長方形とみなす。縦の長さが 3, 横の長さが 6 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき, 敷き詰め方の総数は r_3 を求めればよいので $r_3 = r_2 + 2t_2 = 11 + 2 \cdot 15 = \underline{\mathbf{41}_{ソタ}}$ である。

また, 縦の長さが 3 , 横の長さが 8 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき, 敷き詰め方の総数は r_4 を求めればよいので $r_4 = r_3 + 2t_3 = 41 + 2(r_3 + t_2) = 41 + 2(41 + 15) = \underline{\mathbf{153}_{チツテ}}$ である。

第 5 問

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0 = \underline{\mathbf{5}_{ア}}$ である。また, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\underline{\mathbf{9}_{イ}}}{\underline{\mathbf{10}_{ウエ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であることにより,

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{\underline{\mathbf{2}_{オ}}}{\underline{\mathbf{5}_{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{\underline{\mathbf{1}_{キ}}}{\underline{\mathbf{2}_{ク}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{2}{5}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -2 + 2p = \underline{\mathbf{4}_{ケ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。同様に, $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CE}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{CE}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = 0$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 4 + p^2 + q^2 = 20 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。

① と ②, および $q > 0$ から, $p = 3$ と $q = \sqrt{7}$ が出るので, B の座標は $\left(3,\ \underline{\mathbf{2}_{コ}},\ \sqrt{\underline{\mathbf{7}_{サ}}}\right)$ である。

(2) 3 点 O, A, B の定める平面を α とし, 点 $(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ を G とする。また, α 上に点 H を $\overrightarrow{\mathrm{GH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が成り立つように撮る。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表す。

H が α 上にあることから, 実数 $s,\ t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表される。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \underline{-_{シ}}\overrightarrow{\mathrm{OG}} + s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。これと, $\overrightarrow{\mathrm{GH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{GH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が成り立つことから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} &= -\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= 4 - 8 + 0 + 5s + 4t = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{GH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= -\overrightarrow{\mathrm{OG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\ &= -8 - 12 + 5 + 4s + 20t = 0\end{aligned}$$

より, $s = \dfrac{\mathbf{1}_{ス}}{\underline{\mathbf{3}_{セ}}},\ t = \dfrac{\mathbf{7}_{ソ}}{\underline{\mathbf{12}_{タチ}}}$ が得られる。ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。また,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + \frac{3}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{3}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{11}{12}$ から, H は **三角形 OBC の内部の点** ①$_{シ}$ であることがわかる。