

令和3年度大学入学共通テスト 数学 II・数学 B 解答解説

GTS

実施日：2021/1/17 作成日：2021/1/27

第1問

[1]

(1)

$$\sin \theta = \frac{\pi}{3\text{ア}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}$$

であるから、三角関数の合成により

$$y = 2\text{イ} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

と変形できる。よって、 $-1 \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$ であるから、 y は $\theta = \frac{\pi}{6\text{ウ}}$ で最大値 2エ をとる。

(2) (i) $p = 0$ のとき、 $y = \sin \theta$ であるから、 y は $\theta = \frac{\pi}{2\text{オ}}$ で最大値 1カ をとる。

(ii) $p > 0$ のときは、加法定理

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha$$

を用いると

$$y = \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{1 + p^2\text{①キ}} \cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし、 α は

$$\sin \alpha = \frac{1\text{②ク}}{\sqrt{1 + p^2}}, \cos \alpha = \frac{p\text{③ケ}}{\sqrt{1 + p^2}}, 0 < \alpha < \frac{\alpha}{2}$$

を満たすものとする。このとき、 y は $\theta = \alpha\text{④コ}$ で最大値 $\sqrt{1 + p^2\text{⑤カ}}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき、 y は $\theta = \frac{\pi}{2}\text{⑥キ}$ で最大値 1ク をとる。

[2]

(1) $f(0) = 1\text{セ}$ 、 $g(0) = 0\text{ソ}$ である。また、 $f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 1$ より $x = 0\text{タ}$ で最小値 1チ をとる。

$g(x) = -2$ となる x の値は $2^x - 2^{-x} = -4 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -2 \pm \sqrt{5}$ 、 $2^x > 0$ より $x = \log_2(\sqrt{5\text{ツ}} - 2\text{テ})$ である。

(2) 次の ① ~ ④ はどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$$f(-x) = f(x)\text{①ト} \dots\dots\dots \text{①}$$

$$g(-x) = -g(x)\text{②チ} \dots\dots\dots \text{②}$$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 1\text{ツ} \dots\dots\dots \text{③}$$

$$g(2x) = 2\text{リ}f(x)g(x) \dots\dots\dots \text{④}$$

※左辺を計算すれば右辺が求まる。

(3) (1), (2) で示されたことのいくつかを利用すると、式 (A) ~ (D) のうち、(B)①ネ 以外の三つは成り立たないことが分かる。

※式 (A) ~ (D) の左辺と右辺をそれぞれ計算すればよい。

第 2 問

(1)

$$y = 3x^2 + 2x + 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = 2x^2 + 2x + 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② の 2 次関数のグラフには次の共通点がある。

- y 軸との交点の y 座標は 3ア である。
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \underline{2イ}x + \underline{3ウ}$ である。

次の ④～⑤ の 2 次関数のグラフのうち, y 軸との交点における接線の方程式が $y = 2x + 3$ となるものは x の係数が 2, 定数項が 3 となるので, $y = -x^2 + 2x + \underline{3(4)エ}$ である。

a, b, c を 0 でない実数とする。
 曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $(0, \underline{cオ}$) における接線を l とすると, その方程式は $y = \underline{bカ} + \underline{cキ}$ である。

接線 l と x 軸との交点の x 座標は $0 = bx + c$ より $\frac{-cクケ}{\underline{bコ}}$ である。

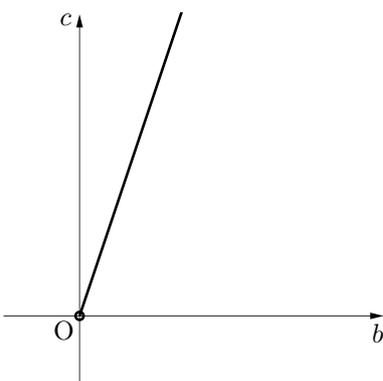
a, b, c が正の実数であるとき, 曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 l および直線 $x = \frac{-c}{b}$ で囲まれた図形の面積を S とす

ると $S = \int_{-\frac{c}{b}}^0 \{(ax^2 + bx + c) - (bx + c)\} dx = \left[\frac{1}{3} ax^3 \right]_{-\frac{c}{b}}^0$ より

$$S = \frac{ac^{\underline{3サ}}}{\underline{3シ}b^{\underline{3ス}}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である。

③ において, $a = 1$ とし, S の値が一定となるように正の実数 b, c の値を変化させる。このとき, b と c の関係を表すグラフの概形は ④セ である。



参考: $b > 0, c > 0$ となるので $c = 3Sb$

(2)

$$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5 \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

$$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5 \quad \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

④, ⑤, ⑥ の 3 次関数のグラフには次の共通点がある。

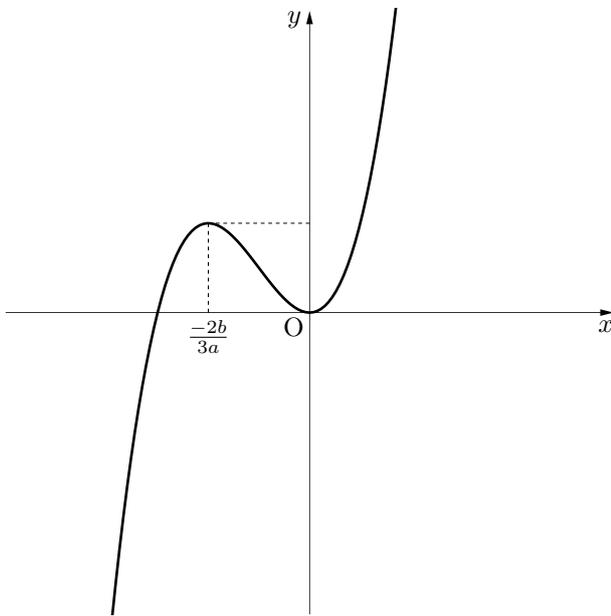
- y 軸との交点の y 座標は 5ソ である。
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \underline{3タ}x + \underline{5チ}$ である。

a, b, c, d を 0 でない実数とする。
 曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点 $(0, \underline{dツ})$ における接線の方程式は $y = \underline{cテ}x + \underline{dト}$ である。

次に, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = cx + d$ とし, $f(x) - g(x)$ について考える。

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。 a, b, c, d が正の実数であるとき, $y = h(x)$ のグラフの概形は $y = ax^3 + bx^2, y' = 3ax^2 + 2bx$ となることより, 原点が極小値をとるので ②ナ である。

参考:



$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフのの共有点の座標は $ax^3 + bx^2 = 0$ より $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ と 0 である。また、 x が $-\frac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき、 $|f(x) - g(x)|$ の値が最大となるのは、 $|h(x)|$ の最大値を考えればよいので、 $-\frac{b}{a} < -\frac{2b}{3a} < 0$ より、 $x = \frac{-2b}{3a}$ のときである。

第 3 問

(1) 全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.5 とする。このとき、 100 人の無作為標本のうちで全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を X とすると、 X は **二項分布 $B(100, 0.5)$** に従う。また、 X の平均 (期待値) は 100×0.5 より **50**、標準偏差は $\sqrt{100 \times 0.5 \times (1 - 0.5)}$ より **5** である。

(2) 標本の大きさ 100 は十分に大きいので、 100 人のうち全く読書をしなかった生徒の数は近似的に正規分布に従う。

全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.5 とするとき、全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を p_5 とおく。 p_5 の近似値を求めると、二項分布 $B(100, 0.5)$ が、 $Z = \frac{X - 50}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことを利用して

$$p_5 = P(X \leq 36) = P\left(Z \leq \frac{36 - 50}{5}\right) = P(Z \leq -2.8) = P(Z \geq 2.8) = 0.5 - p(2.8) = 0.5 - 0.4974 = 0.0026$$

これに近い値を求めると $p_5 = \mathbf{0.003}$ である。

また、全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.4 とするとき、全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を p_4 とおくと、二項分布 $B(100, 0.4)$ は、正規分布 $N(40, 24)$ に従う。したがって、 $Z' = \frac{X - 40}{2\sqrt{6}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うので

$$p_4 = P(X \leq 36) = P\left(Z' \leq \frac{36 - 40}{2\sqrt{6}}\right) = P(Z' \leq -0.82) = P(Z' \geq 0.82) = 0.5 - p(0.82) = 0.5 - 0.2939 = 0.2061$$

より、 $p_4 > p_5$ である。

(3) 1 週間の読書時間の母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を $C_1 \leq m \leq C_2$ とする。標本の大きさ 100 は十分に大きいことと、1 週間の読書時間の標本平均が 204 、母標準偏差が 150 であることを用いると、これも正規分布に従い

$$Z = \frac{204 - m}{\frac{(150)^2}{100}} = \frac{204 - m}{15}$$

である。次に、信頼度 95% の信頼区間 $C_1 \leq m \leq C_2$ を求めると、 95% から $\frac{0.95}{2} = 0.475$ より、正規分布表で 0.475 を与える Z は $Z = 1.96$ であるから

$$-1.96 \leq \frac{204 - m}{15} \leq 1.96 \iff 204 - 29.4 \leq 204 + 29.4$$

となるので $C_1 + C_2 = \mathbf{408}$ 、 $C_1 - C_2 = \mathbf{58.8}$ であることがわかる。

また、信頼度 95% であるということは、母平均 m について、区間 $C_1 \leq m \leq C_2$ であることが約 95% の確からしきで期待できることを示している。したがって、必ずしも $C_1 \leq m$ も $m \leq C_2$ も成り立つとは限らない。

(4) 図書委員長が 100 人の生徒を無作為に抽出した。その調査における、全く読書をしなかった生徒の数を n とする。

校長先生の調査結果によると全く読書をしなかった生徒は 36 人であり、無作為抽出であるため、 n と 36 の大小はわからない③

(5) (4) の図書委員会が行った調査結果による母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間を $D_1 \leq m \leq D_2$ 、校長先生が行った調査結果による母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間を (3) の $C_1 \leq m \leq C_2$ とする。ただし、母集団は同一であり、1 週間の読書時間の母標準偏差は 150 とする。

標本平均によって D_1, D_2 は変化するので、 C_1, C_2 との大小関係は分からない。

つまり、 $D_2 < C_1$ または $C_2 < D_1$ となる場合もある②、

また、(3) より標本平均によらず $C_2 - C_1 = 58.8$ で一定であるから、 $D_2 - D_1 = 58.8$ になる。

したがって、 $C_2 - C_1 = D_2 - D_1$ が必ず成り立つ④

第 4 問

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ①}$$

(1) 自然数 n について、 a_n, a_{n+1}, b_n はそれぞれ

$$a_n = 3\text{ア} + (n-1)p \quad \text{..... ②}$$

$$a_{n+1} = 3 + np \quad \text{..... ③}$$

$$b_n = 3\text{イ} r^{n-1}$$

と表される。 $r \neq 0$ により、すべての自然数 n について、 $b_n \neq 0$ となる。

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから、① の両辺を b_n で割ることにより

$$2\text{ウ} a_{n+1} = r(a_n + 3\text{エ}) \quad \text{..... ④}$$

が成り立つことが分かる。④ に ② と ③ を代入すると、 $2(3 + np) = r(3 + np - p + 3) \Leftrightarrow 6 + 2pn = 6r + rpn - rp$ より

$$(r - 2\text{オ})pn = r(p - 6\text{カ}) + 6\text{キ} \quad \text{..... ⑤}$$

となる。⑤ がすべての n で成り立つことおよび $p \neq 0$ により、 $r = 2$ を得る。さらに、このことから、 $2(p - 6) + 6 = 0$ より、 $p = 3\text{ク}$ を得る。

以上から、すべての自然数 n について、 a_n と b_n が正であることも分かる。

(2) $p = 3, r = 2$ であることから、 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は、 $a_n = 3 + 3(n-1) = 3n, b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ であることより、それぞれ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3\text{ケ}}{2\text{コ}} n(n + 1\text{サ})$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = 3\text{セ} (2^n - 1\text{ス})$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ に対して、初項 3 の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ⑥}$$

a_n が正であることから、⑥ を変形して、 $c_{n+1} = \frac{4\text{シ} a_{n+1}}{a_n + 3\text{ソ}}$ を得る。

さらに、 $p = 3$ であるから、 $4a_{n+1} = 12n + 4, a_n + 3 = 3n + 3$ となり、 $\frac{4a_{n+1}}{a_n + 3} > 1$ となるので、数列 $\{c_n\}$ は公比が 1 より大きい等比数列である②

(4) q, u は定数で、 $q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して、初項 3 の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - qd_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{..... ⑦}$$

$r = 2$ であることから、⑦ を変形して $d_{n+1} = \frac{2\text{チ}}{q}(d_n + u)$ を得る。したがって、数列 $\{d_n\}$ が、公比 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は、 $q > 2\text{ツ}$ かつ $u = 0\text{テ}$ である。

第 5 問 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを a とする。

(1) 1 辺の長さが 1 の正五角形 $OA_1B_1C_1A_2$ を考える。

$\angle A_1C_1B_1 = 36\text{ア}$ °, $\angle C_1A_1A_2 = 36^\circ$ となることから、 $\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。ゆえに

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \text{ア}\overrightarrow{B_1C_1}$$

であるから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{\text{ア}} \overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{\text{ア}} (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$$

また、 $\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で、さらに、 $\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1C_1} &= \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} \\ &= -a\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a\overrightarrow{OA_2} \\ &= (\underline{a} - \underline{1}) (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\frac{1}{a} = a - 1$$

が成り立つ。 $a > 0$ に注意してこれを解くと、 $a^2 - a - 1 = 0$ より $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を得る。

(2) 1 辺の長さが 1 の正十二面体を考える。正十二面体とは、どの面もすべて合同な正五角形であり、どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。

面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する。 $\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{OA_2} + a\overrightarrow{OA_1}$$

である。また

$$|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}|^2 = |\overrightarrow{A_1A_2}|^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3\kappa + \sqrt{5}\xi}{2\zeta}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} &= |\overrightarrow{OA_1}| |\overrightarrow{OA_2}| \cos \angle A_1OA_2 = |\overrightarrow{OA_1}| |\overrightarrow{OA_2}| \frac{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 - |\overrightarrow{A_1A_2}|^2}{2|\overrightarrow{OA_1}| |\overrightarrow{OA_2}|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 - |\overrightarrow{A_1A_2}|^2}{2} = \frac{1 + 1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1\eta - \sqrt{5}\iota}{4\mu}\end{aligned}$$

を得る。

次に、面 $OA_2B_2C_2A_3$ に着目すると

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2}$$

である。さらに

$$\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

が成り立つことが分かる。ゆえに

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_1} \cdot (\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2}) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \textcircled{\text{9}}_{\text{シ}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} &= (\overrightarrow{OA_2} + a\overrightarrow{OA_1}) \cdot (\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2}) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \underline{0} \textcircled{\text{0}}_{\text{ス}}\end{aligned}$$

である。 $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1 - 5}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}\right)$ を利用するとよい

最後に、面 $A_2C_1A_3DEB_2$ に着目する。

$$\overrightarrow{B_2D} = a\overrightarrow{A_2C_1} = \overrightarrow{OB_1}$$

であることに注意すると、4 点 O, B_1, D, B_2 は同一平面上にあり、四角形 OB_1DB_2 は 正方形である $\textcircled{\text{0}}_{\text{セ}}$ ことがわかる。

($\because OB_2 = OB_1 = B_1D = B_2D, OB_2 \parallel B_2D, OB_1 \parallel B_1D$)