令和４年度大学入学共通テスト　数学 I・数学 A 解答解説

GTS

実施日：2022/1/16　作成日：2022/1/18

第 1 問

〔１〕　実数 $a,\ b,\ c$ が

$$a+b+c=1\cdots\cdots\cdots①$$

および

$$a^2+b^2+c^2=13\cdots\cdots\cdots②$$

を満たしているとする。

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ であるから ① と ② の値を代入して

$$1=13+2(ab+bc+ca)$$

となるので，

$$ab+bc+ca=\underline{\mathbf{-6}_{\text{アイ}}}$$

であることがわかる。よって

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2&=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\\&=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)\\&=2\cdot13-2\cdot(-6)\\&=26+12=\underline{\mathbf{38}_{\text{ウエ}}}\end{aligned}$$

(2) $a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。$b-c=x,\ c-a=y$ とおくと

$$\begin{aligned}x+y&=b-c+c-a\\&==b-a\\&==-(a-b)=\underline{\mathbf{-2}_{\text{オカ}}}\sqrt{5}\end{aligned}$$

である。また (1) の計算から

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(2\sqrt{5})^2+x^2+y^2=38$$

であるから

$$x^2+y^2=38-20=\underline{\mathbf{18}_{\text{キク}}}$$

が成り立つ。

これらより

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=18+2xy=20$$

であるから $(b-c)(c-a)=xy=1$ となるので

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\underline{\mathbf{2}_{\text{ケ}}}\sqrt{5}$$

である。

〔２〕　表より $\tan 16^\circ = 0.2867$

水平方向の距離を 4 倍すると鉛直方向と同じ縮尺となるので

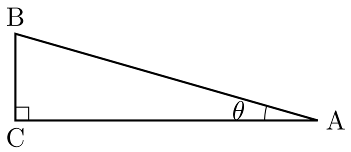
$$\tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{BC}}{4\mathrm{AC}} = \frac{1}{4}\cdot\tan 16^\circ = \frac{1}{4}\cdot 0.2867 = 0.071675$$

よって, 小数第４位を四捨五入して

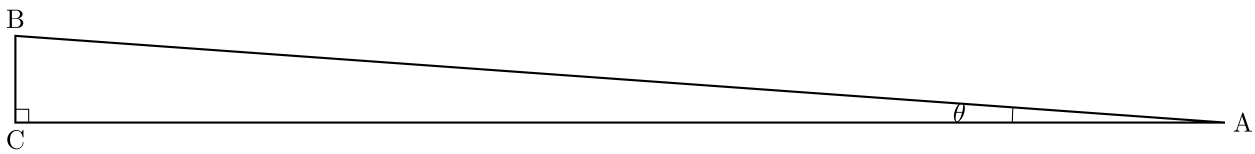
$$\tan\angle\mathrm{BAC} = \underline{\mathbf{0.072}_{\text{コサシス}}}$$

したがって, $\angle$BAC の大きさは $\underline{4^\circ \text{ より大きく } 5^\circ \text{ より小さい } ②_{\text{セ}}}$

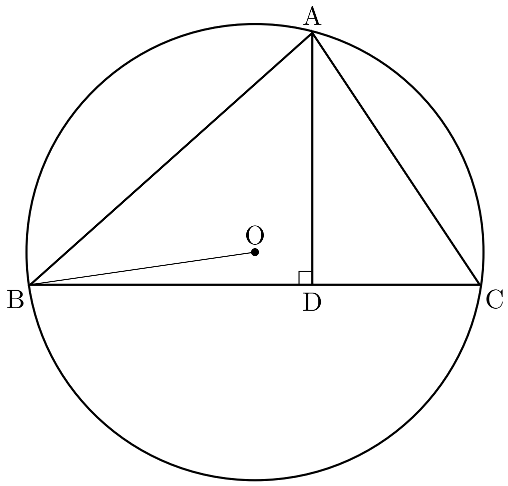
問題の図１



縮尺を $\dfrac{1}{25000}$ に合わせた本来の図（水平方向の距離を 4 倍）



〔３〕問題に対する図は以下のようになる。



(1)　正弦定理より,

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = 2\cdot 3 = 6$$

であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{4}{6} = \frac{\underline{\mathbf{2}_{\text{ソ}}}}{\underline{\mathbf{3}_{\text{タ}}}}$$

また, 三角比の定義より $\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\underline{\mathbf{10}_{\text{チツ}}}}{\underline{\mathbf{3}_{\text{テ}}}}$$

(2) $2\mathrm{AB} + \mathrm{AC} = 14$ より

$$\mathrm{AB} = 7 - \frac{\mathrm{AC}}{2}\cdots\cdots\cdots ①$$

また, 正弦定理より

$$\mathrm{AB}=6\cdot\sin\angle\mathrm{ACB},\ \mathrm{AC}=6\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$$

であるから, ① に代入して

$$\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\sin\angle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots ②$$

$0^\circ<\angle\mathrm{ACB}<90^\circ,\ 0^\circ<\angle\mathrm{ABC}<180^\circ$ より $0<\sin\angle\mathrm{ACB}\leqq 1,\ 0<\sin\angle\mathrm{ABC}\leqq 1$
$\sin\angle\mathrm{ACB}$ の式に ② を代入して

$$0<\frac{7}{6}-\frac{1}{2}\sin\angle\mathrm{ABC}\leqq 1$$

これと $0<\sin\angle\mathrm{ABC}\leqq 1$ を連立して解くと

$$\frac{1}{3}\leqq\sin\angle\mathrm{ABC}\leqq 1$$

これより $2\leqq AC\leqq 6$ となるので, ① の式から

$$\underline{\mathbf{4}_{\text{ト}}}\leqq\mathrm{AB}\leqq\underline{\mathbf{6}_{\text{ナ}}}$$

である。

三角比の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}&=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}=\mathrm{AB}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{6}\\&=\mathrm{AB}\frac{14-2\mathrm{AB}}{6}\\&=\frac{\underline{\mathbf{-1}_{\text{ニヌ}}}}{\underline{\mathbf{3}_{\text{ネ}}}}\mathrm{AB}^2+\frac{\underline{\mathbf{7}_{\text{ノ}}}}{\underline{\mathbf{3}_{\text{ハ}}}}\end{aligned}$$

と表せるので, AD の長さの最大値は

$$\mathrm{AD}=-\frac{1}{3}\left(\mathrm{AB}-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$$

と AB の範囲から $\mathrm{AB}=4$ のとき, AD の長さの最大値は $\underline{\mathbf{4}_{\text{ヒ}}}$ である。

第 2 問

〔1〕$p,\ q$ を実数とする。

$$x^2+px+q=0\cdots\cdots\cdots ①$$
$$x^2+qx+p=0\cdots\cdots\cdots ②$$

① または ② を満たす実数 x の個数を n とおく。

(1) $p=4,\ q=-4$ のとき,

① は $x^2+4x-4=0$ より, 実数解は $x=-2\pm2\sqrt{2}$ となる。

② は $x^2-4x+4=0$ より, 実数解は $x=2$ となる。

よって, $n=\underline{\mathbf{3}_{\text{ア}}}$ である。また, $p=1,\ q=-2$ のとき,

① は $x^2+x-2=0$ より, 実数解は $x=-2,\ 1$ となる。

② は $x^2-2x+1=0$ より, 実数解は $x=1$ となる。

よって, $n=\underline{\mathbf{2}_{\text{イ}}}$ である。

(2) $p=-6$ のとき, $n=3$ になる場合を考える。$\alpha^2-6\alpha+q=0\ \cdots$ ①, $\alpha^2+q\alpha-6=0\ \cdots$ ② となるので, ① から ② の差をとると $-(6+q)\alpha+q+6=0$ すなわち

$$-(q+6)(\alpha+1)=0$$

$q=-6$ のとき $p=q$ となり, ① と ② は同じ式になるので, 題意を満たさない。
$\alpha=-1$ のとき $q=5$ となり, ① が $x^2-6x+5=0=(x-5)(x-1)=0$ より $x=1,\ 5$, ② が $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)=0$ より $x=1,-6$
したがって, $n=3$ となる。

また, $q=9$ のとき, ① が $x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ より $x=3$, ② が $x^2+9x-6=0$ より $x=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$

となるので, $n=3$ となる。

したがって, $n=3$ となる q の値は

$$q = \underline{\mathbf{5}_{ウ}},\ \underline{\mathbf{9}_{エ}}$$

(3) $p=-6$ に固定したまま, q の値だけを変化させる。

$y = x^2 - 6x + q \cdots\cdots\cdots③$

$y = x^2 + qx - 6 \cdots\cdots\cdots④$

③ を変形して $y=(x-3)^2+q-9$ より, ③ の頂点は $(3,\ q-9)$

このことより, q が 1 より大きくなったとき, 頂点の x 座標は変化せず y 座標は大きくなる。

したがって, ③ のグラフの移動の様子を示すと $\underline{⑥_{オ}}$ となる。

④ を変形して $y=\left(x+\dfrac{q}{2}\right)^2-\dfrac{q^2}{4}-6$ より, ④ の頂点は $\left(-\dfrac{q}{2},\ -\dfrac{q^2}{4}-6\right)$

このことより, q が 1 より大きくなったとき, 頂点の x 座標は 小さくなり, y 座標は小さくなる。

したがって, ④ のグラフの移動の様子を示すと $\underline{①_{カ}}$ となる。

(4) $5<q<9$ とする。全体集合 U を実数全体の集合とし, U の部分集合 $A,\ B$ を

$A=\{x|x^2-6x+q<0\}$

$B=\{x|x^2+qx-6<0\}$

とする。 U の部分集合 X に対し, X の補集合を $\overline{X}$ と表す。

A について, $q=5$ のとき $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)<0$ より $1<x<5$, $q=9$ のとき $x^2-6x+9=(x-3)^2<0$ より解なしとなるので, 両方の範囲を合わせて

$$A=\{x|1<x<5\}$$

また,

$$\overline{A}=\{x|x \leqq 1,\ 5 \leqq x\}$$

B について, $q=5$ のとき $x^2+5x-6=(x+6)(x-1)<0$ より $-6<x<1$, $q=9$ のとき $x^2+5x-6<0$ より $\dfrac{-9-\sqrt{105}}{2}<x<\dfrac{-9+\sqrt{105}}{2}$ となるので, 両方の範囲を合わせて

$$B=\left\{x\middle|\frac{-9-\sqrt{105}}{2}<x<1\right\}$$

したがって, A と B の間には集合の包含関係がないことが分かり, B は $\overline{A}$ の部分集合であることが分かる。

このとき, 次のことが成り立つ。

- $x \in A$ は, $x \in B$ であるための, 必要条件でも十分条件でもない $③_{キ}$。
- $x \in B$ は, $x \in \overline{A}$ であるための, 十分条件であるが, 必要条件ではない $①_{ク}$。

〔2〕

(1) ヒストグラムを参考に度数分布表を作成すると以下のようになる。

人＼年	2009 年度	2018 年度
0〜15	0	1
15〜30	11	9
30〜45	6	11
45〜60	4	2
60〜75	3	1
75〜90	2	2
90〜105	0	1
105〜120	1	0
120〜135	0	2
135〜150	1	0
150〜165	0	0
165〜180	1	0
合計	29	29

※ヒストグラムを見ながらでも答えられるが, 度数分布表を作った方がわかりやすいときがある。

ヒストグラムまたは度数分布表から, 中央値, 第１四分位数, 第３四分位数, 範囲, 四分位範囲がある階級を求める

と以下のようになる。

参考：29 個のデータがあるので, 中央値は上から 15 番目, 第１四分位数は上から 7 番目と 8 番目の間, 第３四分位数は下から 7 番目と 8 番目の間にくる階級を求めればよい。また, 範囲と四分位範囲はヒストグラムと度数分布表からでは確定できないので, 最小値から最大値までの幅を記した。

代表値＼年	2009 年度	2018 年度
中央値	30〜45	30〜45
第１四分位数	15〜30	15〜30
第３四分位数	60〜75	45〜60
範囲	135〜175	105〜135
四分位範囲	30〜60	15〜45

- 2009 年度と 2018 年度の中央値が含まれる階級の階級値を比較すると 両者は等しい ②ケ 。
- 2009 年度と 2018 年度の第１四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると 両者は等しい ②コ 。
- 2009 年度と 2018 年度の第３四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると 2018 年度の方が小さい ⓪サ である。
- 2009 年度と 2018 年度の範囲を比較すると 2018 年度の方が小さい ⓪シ。
- 2009 年度と 2018 年度の四分位範囲を比較すると
  これら二つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない ③ス。

(2) (1) の度数分布表から 2009 年度の最大値は 165〜180 , 第１四分位数は 15〜30, 第３四分位数は 60〜75 にある。したがって, 2009 年度について, 「教育機関１機関あたりの学習者数」（横軸）と「教員１人あたりの学習者数」（縦軸）の散布図は ②セ。

(3) 表１は S と T について, 平均値, 標準偏差および共分散を計算したものである。ただし, S と T の共分散は, S の偏差と T の偏差の積の平均値である。

表１の数値が四捨五入していない正確な値であるとして, S と T の相関係数を求めると 相関係数 $=$

表１　平均値, 標準偏差および共分散

S の平均値	T の平均値	S の標準偏差	T の標準偏差	S と T の共分散
81.8	72.9	39.3	29.9	735.3

$$\frac{S \text{ と } T \text{ の共分散}}{S \text{ の標準偏差} \times T \text{ の標準偏差}}$$ より

$$\frac{735.3}{39.3 \times 29.9} = 0.6257499\cdots\cdots$$

となるので, 小数第３位を四捨五入して, **0ッ.63タチ** である。

(4) 表１と (3) で求めた相関係数を参考にすると, (3) で算出した 2009 年度の S（横軸）と T（縦軸）の散布図は相関係数が 0.5 より大きい（どちらかというと直線的に分布する）ことと, それぞれの平均値が 100 より小さいことから ③ツ

第 3 問

(1)　2 人または 3 人で交換会を開く場合を考える。

(i) A, B の 2 人がそれぞれプレゼント a, b を持って交換会を開く場合, 1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は, A, B それぞれが b, a を受け取る場合の **1ア** 通りである。したがって, 1 回目の交換で交換会が終了する確率は, プレゼントの交換の仕方が全部で 2 通りであることより, $\dfrac{\mathbf{1}_{イ}}{\mathbf{2}_{ウ}}$ である。

(ii) A, B, C の 3 人がそれぞれプレゼント a, b, c を持って交換会を開く場合, 1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は, A, B, C それぞれが b, c, a を受け取る場合と c, a, b を付け撮る場合の **2エ** 通りである。したがって, 1 回目の交換で交換会が終了する確率は, プレゼントの交換の仕方が全部で $3! = 6$ 通りであることより, $\dfrac{2}{6} = \dfrac{\mathbf{1}_{オ}}{\mathbf{3}_{カ}}$ である。

(iii) (ii) より, 1 回の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{1}{3}$ で終了しない確率は $\dfrac{2}{3}$ である。 3 人で交換会を開く場合, 4 回以下の交換で終了する確率は, 1 回目で終了する確率が $\dfrac{1}{3}$, 2 回目で終了する確率が $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3}$, 3 回目で終了する

確率は $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$, 4 回目で終了する確率が $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$ となるので,

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{27+18+12+8}{81}=\frac{\underline{\mathbf{65}_{\text{キク}}}}{\underline{\mathbf{81}_{\text{ケコ}}}}$$

である。

(2) 1 回目の交換で, 4 人のうち, ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 誰が自分の持参したプレゼントを受け取るかで 4 通り, 残りの 3 人は自分以外のプレゼントを受け取っているので (1)(ii) より 2 通りであるから, $4\times 2=\underline{\mathbf{8}_{\text{サ}}}$ 通りある。

ちょうど 2 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 誰が自分の持参したプレゼントを受け取るかで ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り, 残りの 2 人は自分以外のプレゼントを受け取るので (1)(i) より 1 通りであるから, ${}_4\mathrm{C}_2\times 1=\underline{\mathbf{6}_{\text{シ}}}$ 通りある。

ちょうど 3 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 残りの 1 人も自分の持参したプレゼントを受け取ることになるので, 0 通りである。

4 人全員が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 1 通りである。

よって, 1 回目のプレゼントの受け取り方のうち, 1 回目の交換で交換会が終了したい受け取り方の総数は $8+6+0+1=\underline{\mathbf{15}_{\text{スエ}}}$ である。

したがって, 1 回目の交換で交換会が終了する確率は, 総数が $4!=24$ 通りであることより, 余事象を用いて $1-\frac{15}{24}=\frac{9}{24}=\frac{\underline{\mathbf{3}_{\text{ソ}}}}{\underline{\mathbf{8}_{\text{タ}}}}$ である。

(3) 5 人で交換会を開く場合, 5 人のうち, ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 誰が自分の持参したプレゼントを受け取るかで 5 通り, 残りの 4 人は自分以外のプレゼントを受け取っているので (2) より 9 通りであるから, $5\times 9=45$ 通りある。

ちょうど 2 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 誰が自分の持参したプレゼントを受け取るかで ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り, 残りの 3 人は自分以外のプレゼントを受け取るので (1)(ii) より 2 通りであるから, ${}_5\mathrm{C}_2\times 2=20$ 通りある。

ちょうど 3 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 誰が自分の持参したプレゼントを受け取るかで ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り, 残りの 2 人は自分以外のプレゼントを受け取るので (1)(i) より 1 通りであるから, ${}_5\mathrm{C}_3\times 1=10$ 通りある。

ちょうど 4 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 残りの 1 人も自分の持参したプレゼントを受け取ることになるので, 0 通りである。

5 人全員が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は, 1 通りである。

よって, 1 回目のプレゼントの受け取り方のうち, 1 回目の交換で交換会が終了したい受け取り方の総数は $45+20+10+0+1=76$ である。

したがって, 1 回目の交換で交換会が終了する確率は, 総数が $5!=120$ 通りであることより, 余事象を用いて $1-\frac{76}{120}=\frac{44}{120}=\frac{\underline{\mathbf{11}_{\text{チツ}}}}{\underline{\mathbf{30}_{\text{テト}}}}$ である。

(4) A, B, C, D, E の 5 人が交換会を開く。 1 回目の交換で A, B, C, D がそれぞれ自分以外の持参したプレゼントを受け取ったとき, その回で交換会が終了する条件つき確率は, 5 人とも自分以外のプレゼントを受け取る場合が (3) より 44 通り, E 以外の 4 人が自分以外のプレゼントを受け取る場合が (2) より 9 通りであるから, $\frac{44}{44+9}=\frac{\underline{\mathbf{44}_{\text{ナニ}}}}{\underline{\mathbf{53}_{\text{ヌネ}}}}$ である。

第 4 問 (1) $5^4=625$ を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。このことを用いると, 不定方程式

$$5^4x-2^4y=1\cdots\cdots\cdots①$$

の整数解のうち, x が正の整数で最小になるのは

$x=1$ とすると $625-16y=1$ より $y=39$ となるので

$$x=\underline{\mathbf{1}_{\text{ア}}},\ y=\underline{\mathbf{39}_{\text{イウ}}}$$

であることが分かる。

また, ① の整数解のうち, x が 2 桁の正の整数で最小になるのは

5^4 が奇数で 2^4y+1 が奇数であることより, x が奇数であることを考えると $x=11,\ 13,\ 15,\ 17$ と代入していくと, $x=17$ のとき $625\cdot 17-16y=1$, すなわち $10624=16y$ より $y=664$ となるので,

$$x=\underline{\mathbf{17}_{\text{エオ}}},\ y=\underline{\mathbf{664}_{\text{カキク}}}$$

である。

(2)　次に, 625^2 を 5^5 で割ったときの余りと, 2^5 で割ったときの余りについて考えてみよう。まず

$$625^2 = 5^{\underline{\mathbf{8}_{ケ}}}$$

であり, また, $m = 39$ とすると (1) より $625 = 2^4 \cdot 39 + 1 = 2^4 m + 1$ であるから

$$\begin{aligned} 625^2 &= (2^4 m + 1)^2 \\ &= (2^4)^2 m^2 + 2 \cdot 2^4 m + 1 \\ &= 2^8 m^2 + 2^{\underline{\mathbf{3}_{コ}}} m + 1 \end{aligned}$$

である。これらより, 625^2 を 5^5 で割ったときの余りと 2^5 で割ったときの余りが分かる。

(3) (2) の考察は, 不定方程式

$$5^5 x - 2^5 y = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

の整数解を調べるために利用できる。

x, y を ② の整数解とする。$5^5 x$ は 5^5 の倍数であり, 2^5 で割ったときの余りは 1 となる。よって, (2) により, $5^5 x - 625^2$ は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる。 5^5 と 2^5 は互いに素なので, $5^5 x - 625^2$ は $5^5 \cdot 2^5$ の倍数である。

このことから, $5^5 x - 625^2 = 5^5 \cdot 2^5 n$ とおける（n は整数)。これを x について解くと

$$\begin{aligned} 5^5 x - 625^2 &= 5^5 \cdot 2^5 n \\ 5^5 x - 5^8 &= 5^5 \cdot 2^5 n \\ x - 5^3 &= 2^5 n \\ x &= 2^5 n + 5^3 \\ &= 32n + 125 \end{aligned}$$

となる。

$n = 0$ のとき $x = 125$ であり, このとき $5^5 \cdot 5^3 - 2^5 y = 1$ より $625^2 - 32y = 1$ となるので, $y = (625^2 - 1) \div 32 = 390624 \div 32 = 12207$

したがって, ② の整数解のうち, x が 3 桁の正の整数で最小になるのは

$$x = \underline{\mathbf{125}_{サシス}},\ y = \underline{\mathbf{12207}_{セソタチツ}}$$

であることがわかる。

(4) 11^4 を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。不定方程式

$$11^5 x - 2^5 y = 1 \cdots\cdots\cdots ③$$

の整数解を考える。

x, y を ③ の整数解とする。$11^5 x$ は 11^5 の倍数であり, 2^5 で割ったときの余りは 1 となる。よって, 題意より $11^5 x - (11^4)^2 = 11^5 x - 11^8$ は 11^5 でも 2^5 でも割り切れる。 11^5 と 2^5 は互いに素なので, $11^5 x - 11^8$ は $11^5 \cdot 2^5$ の倍数である。

このことから, $11^5 x - 11^8 = 11^5 \cdot 2^5 n$ とおける（n は整数)。これを x について解くと

$$\begin{aligned} 11^5 x - 11^8 &= 11^5 \cdot 2^5 n \\ x - 11^3 &= 2^5 n \\ x &= 2^5 n + 11^3 \\ &= 32n + 1331 \end{aligned}$$

となる。

$1331 \div 32 = 41.59375$ となることから, $n = -41$ のとき正の整数 x の最小値 $x = 32(-41) + 1331 = -1312 + 1331 = 19$ となる。

このとき $11^5 \cdot 19 - 2^5 y = 1$ より $3059969 - 32y = 1$ となるので, $y = (3059969 - 1) \div 32 = 95624$

したがって, x が正の整数で最小になるのは,

$$x = \underline{\mathbf{19}_{テト}},\ y = \underline{\mathbf{95624}_{ナニヌネノ}}$$

第 5 問 (1) 点 D は線分 AG の中点であるとする。このとき, $\triangle$ABC の形状に関係なく

$\mathrm{AG}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AE},\ \mathrm{AD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AG}$ より $\mathrm{AD}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AE}$ となるので

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\frac{\mathbf{1}_{\text{ア}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{イ}}}}$$

である。また, 点 F の位置に関係なく

メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}}=1,\ \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FC}}=1$$

となるので,

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\underline{\mathbf{2}_{\text{ウ}}}\times\frac{\mathbf{BF}\,①_{\text{エ}}}{\underline{\mathbf{EF}\,③_{\text{オ}}}},\ \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\underline{\mathbf{2}_{\text{カ}}}\times\frac{\mathbf{CF}\,②_{\text{キ}}}{\underline{\mathbf{EF}\,③_{\text{ク}}}}$$

であるので, つねに

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\frac{\mathrm{FB}+\mathrm{FC}}{\mathrm{EF}}=2\cdot\frac{2\mathrm{EF}}{\mathrm{EF}}=\underline{\mathbf{4}_{\text{ケ}}}$$

となる。

($\because$ E は BC の中点であるから $\mathrm{BE}+\mathrm{EC}=2\mathrm{EC}$

すなわち $\mathrm{FB}+\mathrm{FC}=\mathrm{BE}+\mathrm{EC}+\mathrm{CF}+\mathrm{FC}=2\mathrm{EC}+2\mathrm{FC}=2(\mathrm{EC}+\mathrm{FC})=2\mathrm{EF}$)

(2) $\mathrm{AB}=9,\ \mathrm{BC}=8,\ \mathrm{AC}=6$ とし, (1) と同様に, 点 D は線分 AG の中点であるとする。ここで, 4 点 B, C, Q, P が同一円周上にあるように点 F をとる。

このとき, 方べきの定理より

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC}$$

となるので, $9\mathrm{AP}=6\mathrm{AQ}$ より

$$\mathrm{AQ}=\frac{\mathbf{3}_{\text{コ}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{サ}}}}\mathrm{AP}$$

であるから

$$\mathrm{AP}=\frac{\mathbf{13}_{\text{シス}}}{\underline{\mathbf{6}_{\text{セ}}}},\ \mathrm{AQ}=\frac{\mathbf{13}_{\text{ソタ}}}{\underline{\mathbf{4}_{\text{チ}}}}$$

であり,

$$\mathrm{CF}=\frac{\mathbf{44}_{\text{ツテ}}}{\underline{\mathbf{15}_{\text{トナ}}}}$$

(3) $\triangle$ABC の形状や点 F の位置に関係なく, つねに $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$ となるのは, $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{\mathbf{1}_{\text{ニ}}}{\underline{\mathbf{3}_{\text{ヌ}}}}$ のときである。