

令和4年度大学入学共通テスト 数学II・数学B 解答解説

GTS

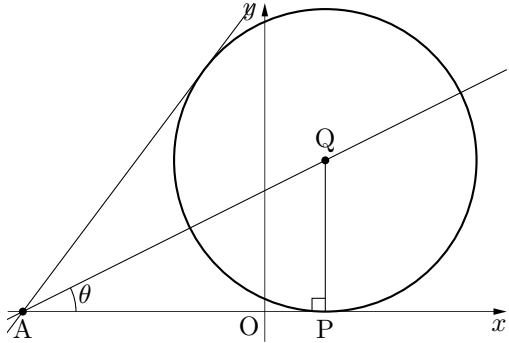
実施日：2022/1/16 作成日：2022/1/26

第1問

〔1〕 座標平面上に点 $A(-8, 0)$ をとる。また、不等式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 \leq 0$$

の表す領域を D とする。



(1) 領域 D は、 $(x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 5^2$ と変形できるので、中心が点 $(\underline{2}, \underline{5})$ 、半径が $\underline{5}$ の円の 周および内部③である。

以下、点 $(2, 5)$ を Q とし、方程式

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$$

の表す図形を C とする。

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考える。

(i) (1) により、図形 C は x 軸に接しているので、直線 $y = \underline{0}$ は点 A を通る C の接線のひとつとなることがわかる。

点 A を通り、傾きが k の直線を ℓ とすると、直線 ℓ の方程式は $y = k(x+8)$ と表すことができる。

(ii) $y = k(x+8)$ を図形 C の式に代入すると、 x についての2次方程式

$$(k^2 + 1)x^2 + (16k^2 - 10k - 4)x + 64k^2 - 80k + 4 = 0$$

が得られる。この方程式が 重解をもつ⑦ ときの k の値が接線の傾きとなる。

(iii) x 軸と直線 AQ のなす角を θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とし、 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を P とすると、 $\triangle APQ$ が直角三角形で、 $AP = 10$ 、 $PQ = 5$ あることより、

$$\tan \theta = \frac{PQ}{AP} = \frac{5}{10} = \frac{\underline{1}}{\underline{2}}$$

であり、直線 $y = 0$ と異なる接線の傾きは $\tan \underline{2\theta}$ ① と表すことができる。

(iv) 点 A を通る C の接線のうち、直線 $y = 0$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。このとき、(ii) または (iii) の考え方をを用いることにより、

$$k_0 = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\underline{4}}{\underline{3}}$$

直線 ℓ と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\underline{0 \leq k \leq k_0}$ ⑤である。

[2] a, b は正の実数であり, $a \neq 1, b \neq 1$ を満たすとする。

(1) まず, $\log_3 9 = \underline{2}$, $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ である。この場合

$$\log_3 9 > \log_9 3$$

が成り立つ。

一方, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ より, $\log_{\frac{1}{4}} \underline{8} = -\frac{3}{2}$, $\log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$ である。この場合

$$\log_{\frac{1}{4}} 8 < \log_8 \frac{1}{4}$$

が成り立つ。

(2) ここで

$$\log_a b = t \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおく。

① により, $\underline{a^t = b^{\textcircled{1}}}$ である。このことにより $\underline{a = b^{\frac{1}{t}} \textcircled{1}}$ が得られ, 以下の ② が成り立つことが確かめられる。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(3) 次に, (2) をもとにして

$$t > \frac{1}{t} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲を求める。

$t > 0$ のとき, ③ の両辺に t を掛けることにより, $t^2 > 1$ を得る。このような t ($t > 0$) の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ のとき, ③ の両辺に t を掛けることにより, $t^2 < 1$ を得る。このような t ($t < 0$) の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

よって, ③ を満たす t ($t \neq 0$) の値の範囲は

$$-1 < t < 0, 1 < t$$

であることがわかる。

ここで, a の値を一つ定めたとき, 不等式

$$\log_a b > \log_b a \cdots \cdots \textcircled{4}$$

を満たす実数 b ($b > 0, b \neq 1$) の値の範囲について考える。

$a > 1$ のとき,

$b > 1$ ならば, $a^t = b$ より $t > 0$ であるから, $t > 1$

よって, $\log_a b > 1$ より $a < b$

$0 < b < 1$ ならば, $a^t = b$ より $t < 0$ であるから, $-1 < t < 0$

よって, $-1 < \log_a b < 0$ より $\frac{1}{a} < b < 1$

$0 < a < 1$ のとき,

$b > 1$ ならば, $a^t = b$ より $t < 0$ であるから, $-1 < t < 0$

よって, $-1 < \log_a b < 0$ より $1 < b < \frac{1}{a}$

$0 < b < 1$ ならば, $a^t = b$ より $t > 0$ であるから, $t > 1$

よって, $\log_a b > 1$ より $b < a$

以上より, ④ を満たす b の値の範囲は, $a > 1$ のときは $\underline{\frac{1}{a} < b < 1, a < b^{\textcircled{3}}}$ であり, $0 < a < 1$ のときは

$$\underline{0 < b < a, 1 < b < \frac{1}{a} \textcircled{0}}$$

(4) $p = \frac{12}{13}$, $q = \frac{12}{11}$, $r = \frac{14}{13}$ とする。

このとき, $0 < p < 1 < r < q$ となり, $r < \frac{1}{p} < q$ が成り立つ。

(3) で $a = p$, $b = q$ とすると, ④ を満たすのは,

$$q < p, 1 < q < \frac{1}{p}$$

のときであるが, どちらも満たさないで, $\log_p q < \log_q p$

また, (3) で $a = p$, $b = r$ とすると, ④ を満たすのは,

$$r < p, 1 < r < \frac{1}{p}$$

のときであるから, $1 < r < \frac{1}{p}$ より $\log_p r > \log_r p$

以上より, $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$ ②である。

第 2 問

[1] a を実数とし, $f(x) = x^3 - 6ax + 16$ とおく。

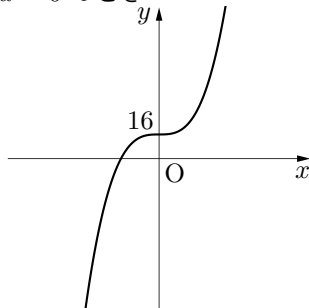
(1) $f'(x) = 3x^2 - 6a = 3(x^2 - 2a)$ より

$a = 0$ のとき, $x = 0$ で $f'(x) = 0$ となる。

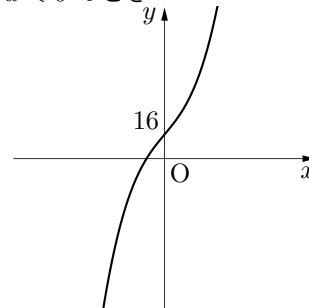
このとき $x = 0$ では接線の傾きが 0 である。また, $x \neq 0$ のとき, $f'(x) > 0$ であるから, $y = f(x)$ のグラフの概形は ①である。

$a < 0$ のとき, $f'(x) = 0$ の実数解はないので, 接線の傾きが 0 となる点はない。また, $-2a > 0$ となることより, すべての x について, $f'(x) > 0$ となる。したがって, $y = f(x)$ のグラフの概形は ②である。

$a = 0$ のとき



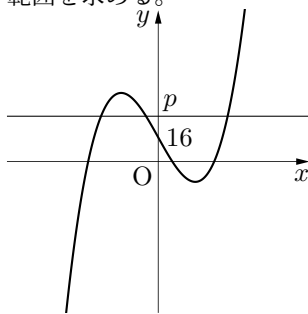
$a < 0$ のとき



(見栄えを整える関係上 x 座標を 10 倍している。)

(見栄えを整える関係上 x 座標を 10 倍している。)

(2) $a > 0$ とし, p を実数とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲を求める。



(見栄えを整える関係上 x 座標を 10 倍している。)

$f'(x) = 3(x^2 - 2a)$ より, $x = \pm\sqrt{2a}$ のとき, $f'(x) = 0$ となり, 極値をもつ。

$x = \sqrt{2a}$ のとき

$$f(x) = (\sqrt{2a})^3 - 6a\sqrt{2a} + 16 = -4\sqrt{2a}^{\frac{3}{2}} + 16$$

$x = -\sqrt{2a}$ のとき

$$f(x) = (-\sqrt{2a})^3 - 6a(-\sqrt{2a}) + 16 = 4\sqrt{2a}^{\frac{3}{2}} + 16$$

したがって, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は

$$-4\sqrt{2a}^{\frac{3}{2}} + 16 \text{ ③ } < p < 4\sqrt{2a}^{\frac{3}{2}} + 16 \text{ ② }$$

である。

$p = -4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ は 2 個の共有点をもつ。それらの x 座標を $q, r (q < r)$ とする。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ が点 (r, p) で接することに注意すると $r = \sqrt{2a}$ であるから
 方程式 $-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16 = x^3 - 6ax + 16$ は $x = \sqrt{2a}$ を解にもつ。
 よって、 $x^3 - 6ax + 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}$ は $x - \sqrt{2a}$ で割り切れ、

$$x^3 - 6ax + 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} = (x - \sqrt{2a})(x^2 - \sqrt{2a}x - 4a) = (x - \sqrt{2a})^2(x + 2\sqrt{2a}) = 0$$

となるので、 $x = -2\sqrt{2a}, \sqrt{2a}$

したがって、

$$q = -2\sqrt{2a}, r = \sqrt{2a}$$

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数を n とすると

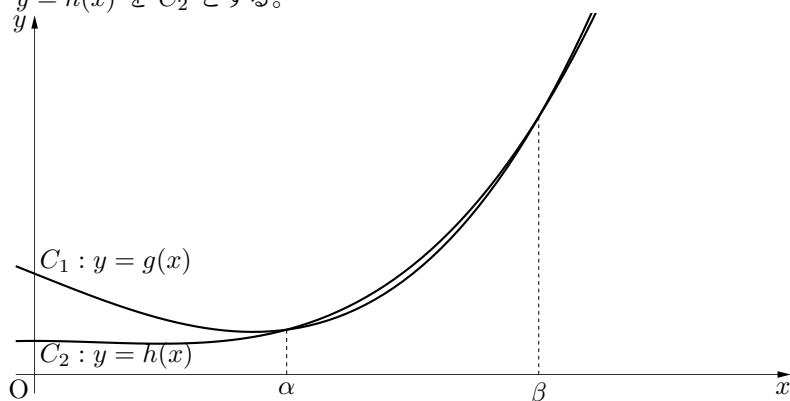
(1) のグラフの概形より、解が 1 個あるいは 2 個の場合は $a > 0$ のときもあるので、① と ② は正しくない。解が 3 個となるのは $a > 0$ のときしかないで、④ は正しい。

また、 $a > 0$ のとき、解の個数は 1 個または 2 個または 3 個であるから、③ と ⑤ は正しくない。

$a < 0$ のとき、解は 1 個となるから ① は正しい。したがって、正しいものは $a < 0$ ならば $n = 1$ ① と

$n = 3$ ならば $a > 0$ ④ である。

[2] $b > 0$ とし、 $g(x) = x^3 - 3bx + 3b^2$, $h(x) = x^3 - x^2 + b^2$ とおく。座標平面上の曲線 $y = g(x)$ を C_1 、曲線 $y = h(x)$ を C_2 とする。



C_1 と C_2 は 2 点で交わる。これらの交点の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、

方程式 $x^3 - 3bx + 3b^2 = x^3 - x^2 + b^2$ を解いて

$x^2 - 3bx + 2b^2 = (x - b)(x - 2b) = 0$ より $x = b, 2b$ であるから、 $\alpha = b$, $\beta = 2b$ である。

$\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また、 $t > \beta$ とし、 $\beta \leq x \leq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

このとき、 $\alpha \leq x \leq \beta$ のとき $h(x) \geq g(x)$ であるから

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{h(x) - g(x)\} dx$$

$$T = \int_{\beta}^t \{g(x) - h(x)\} dx$$

$$S - T = \int_{\alpha}^t \{h(x) - g(x)\} dx$$

であるので、 $\alpha = b$ より

$$\begin{aligned} S - T &= \int_b^t \{-x^2 + 3bx - 2b^2\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}bx^2 - 2b^2x \right]_b^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}bt^2 - 2b^2t + \frac{1}{3}b^3 - \frac{3}{2}b^3 + 2b^3 \\ &= -\frac{1}{6}(2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 2b^3 + 9b^3 - 12b^4) \\ &= \frac{1}{6}(2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3) \end{aligned}$$

が得られる。

したがって、 $S = T$ となるのは $2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3 = 0$ のときである。

$t = b$ のとき $2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3 = 0$ となるので、 $2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3$ は $t - b$ で割り切れる。

よって、 $2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3 = (t - b)(2t^2 - 7bt + 5b^2) = (t - b)^2(2t - 5b) = 0$ より

$S = T$ となるのは $t = b$, $\frac{5}{2}b$ のときであるが、 $t > \beta = 2b$ であるから、 $t = \frac{5}{2}b$ のときである。

第3問 ジャガイモを栽培し販売している会社に勤務する花子さんは、A 地区と B 地区で収穫されるジャガイモについて調べることになった。

(1) A 地区で収穫されるジャガイモには 1 個の重さが 200g を超えるものが 25 % 含まれることが経験的にわかっている。

花子さんは A 地区で収穫されたジャガイモから 400 個を無作為に抽出し、重さを計測した。そのうち、重さが 200 g を超えるジャガイモの個数を表す確率変数を Z とする。このとき Z は二項分布 $B(400, 0.25)$ に従うから、 Z の平均(期待値)は $400 \cdot 0.25 = 100$ である。

(2) Z を (1) の確率変数とし、A 地区で収穫されたジャガイモ 400 個からなる標本において、重さが 200 g を超えてい

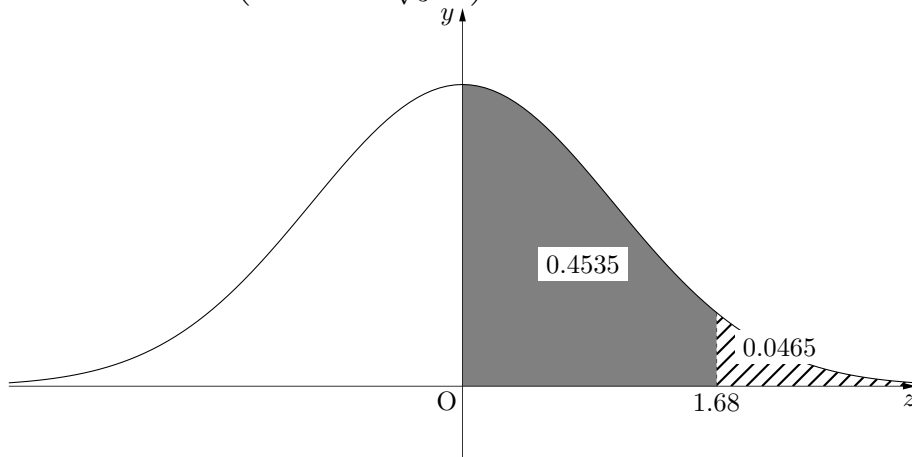
たジャガイモの標本における比率を $R = \frac{Z}{400}$ とする。このとき、 R の標準偏差は $\sigma(R) = \sqrt{\frac{0.25(1 - 0.25)}{400}} =$

$\sqrt{\frac{1}{400} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{80}$ である。

標本の大きさ 400 は十分に大きいので、 R は近似的に $N\left(0.25, \left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)^2\right)$ に従う。

したがって、 $P(R \geq x) = 0.0465$ となるとき、 $Z = \frac{R - \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{80}} = \frac{80R - 20}{\sqrt{3}}$ より、

$P(0 \leq R \leq x) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{80x - 20}{\sqrt{3}}\right) = 0.5 - 0.0465 = 0.4535$ となる。



ゆえに、正規分布表より $z_0 = 1.68$

よって、 $\frac{80x - 20}{\sqrt{3}} = 1.68$ を解いて $x = 0.28633$ である。

(3) B 地区で収穫され、出荷されるジャガイモ 1 個の重さは 100 g から 300 g の間に分布している。B 地区で収穫され、出荷される予定のジャガイモ 1 個の重さを表す確率変数を X とするとき、 X は連続型確率変数であり、 X のとりうる値 x の範囲は $100 \leq x \leq 300$ である。

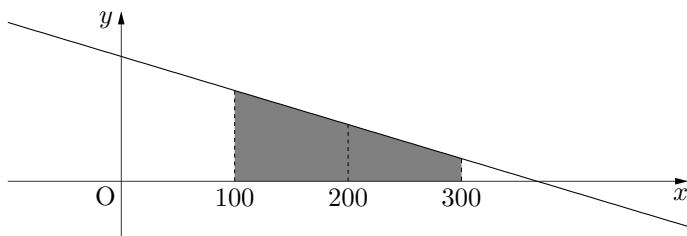
花子さんは、B 地区で収穫され、出荷される予定のジャガイモのうち、重さが 200 g 以上のものの割合を見積もりたいと考えた。そのために花子さんは、 X の確率密度関数 $f(x)$ として適当な関数を定め、それを用いて割合を見積もるという方針を立てた。

B 地区で収穫され、出荷される予定のジャガイモから 206 個を無作為に抽出したところ、重さの標本平均は 180 g であった。

花子さんは、重さ x の増加とともに度数がほぼ一定の割合で減少している傾向に着目し、 X の確率密度関数 $f(x)$ として、1 次関数

$$f(x) = ax + b \quad (100 \leq x \leq 300)$$

を考えることにした。ただし、 $100 \leq x \leq 300$ の範囲で $f(x) \geq 0$ とする。



このとき、 $P(100 \leq X \leq 300) = \underline{1}\underline{2}$ であることから

$$\begin{aligned} \int_{100}^{300} (ax + b) dx &= \left[\frac{1}{2} ax^2 + bx \right]_{100}^{300} \\ &= \frac{1}{2} a \cdot 300^2 + b \cdot 300 - \frac{1}{2} a \cdot 100^2 + b \cdot 100 \\ &= \frac{9}{2} \cdot 10^4 a + 3 \cdot 10^2 b - \frac{1}{2} \cdot 10^4 a + 1 \cdot 10^2 b \\ &= \underline{4}\underline{7} \cdot 10^4 a + \underline{2}\underline{0} \cdot 10^2 b = 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。

花子さんは、 X の平均（期待値）が重さの標本平均 180 g と等しくなるように確率密度関数を定める方法を用いることにした。

連続型確率変数 X のとりうる値 x の範囲が $100 \leq x \leq 300$ で、その確率密度関数が $f(x)$ のとき、 X の平均（期待値） m は

$$m = \int_{100}^{300} x f(x) dx$$

で定義される。この定義と花子さんの採用した方法から

$$m = \frac{26}{3} \cdot 10^6 a + 4 \cdot 10^4 b = 180 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。① と ② により、 $a = -3 \cdot 10^{-5}$ 、 $b = 11 \cdot 10^{-3}$ となるので、確率密度関数は

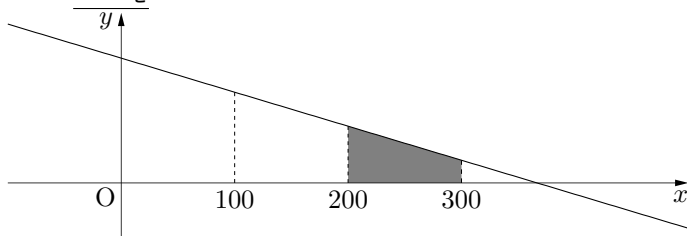
$$f(x) = -\underline{3}\underline{7} \cdot 10^{-5} x + \underline{11}\underline{シス} \cdot 10^{-3} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と得られる。このようにして得られた ③ の $f(x)$ は、 $100 \leq x \leq 300$ の範囲で $f(x) \geq 0$ を満たしており、確かに確率密度関数として適当である。

したがって、花子さんの方針に基づくと、B 地区で収穫され、出荷される予定のすべてのジャガイモのうち、重さが 200 g 以上のものは、 $y = f(x)$ において $x = 200$ と $x = 300$ および x 軸に囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned} \frac{f(200) + f(300)}{2} \times (300 - 200) &= \frac{-3 \cdot 10^{-5}(200 + 300) + 2 \times 11 \cdot 10^{-3}}{2} \times 100 \\ &= \frac{-15 \cdot 10^{-3} + 22 \cdot 10^{-3}}{2} \times 100 \\ &= \frac{7}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 100 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{35}{100} \end{aligned}$$

より、 $\underline{35}\textcircled{2}\underline{セ}$ % であると見積もることができる。



第 4 問 以下のように、歩行者と自転車が自宅を出発して移動と停止を繰り返している。歩行者と自転車の動きについて、数学的に考えてみよう。

自宅を原点とする数直線を考え、歩行者と自転車をその数直線上を動く点をみなす。また、歩行者が自宅を出発してから x 分経過した時点を時刻 x と表す。歩行者は時刻 0 に自宅を出発し、正の向きに毎分 1 の速さで歩き始める。自転車は時刻 2 に自宅を出発し、毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。その後、歩行者は再び正の向きに毎分 1 の速さで歩き出し、自転車は毎分 2 の速さで自宅に戻る。自転車は自宅に到着すると、1 分だけ停止した後、再び毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。これを繰り返し、自転車は自宅と歩行者の間を往復する。

$x = a_n$ を自転車が n 回目に自宅を出発する時刻とし、 $y = b_n$ をそのときの歩行者の位置とする。

- (1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めるために、歩行者と自転車について、時刻 x において位置 y にいることを O を原点とする座標平面上の点 (x, y) で表すことにする。

$a_1 = 2$, $b_1 = 2$ により、自転車が最初に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(2, 0)$ であり、そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(2, 2)$ である。また、自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は $(\underline{4}, \underline{4})$ である。よって、自転車が歩行者が追いついた後、自転車は 1 分停止した後、2 分で自宅に戻り、1 分停止して、その間に歩行者は 3 移動するので、自転車が 2 回目に出発するとき a_n , b_n は

$$a_2 = 4 + 1 + 2 + 1 = \underline{8}, y = 4 + \underline{3}$$

である。

自転車が n 回目に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(a_n, 0)$ であり、そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は (a_n, b_n) である。よって、 n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は、 a_n , b_n を用いて、自転車は自宅から歩行者が進んだ分移動し、歩行者は今まで進んだ分と同じ分移動するので

$$(\underline{a_n + b_n}, \underline{2b_n})$$

と表せる。

以上から、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について、自然数 n に対して、関係式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n + 1 + b_n + 1 \\ &= a_n + \underline{2b_n} + \underline{2} \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(自転車は歩行者に追いついた後 1 分休憩し、 b_n 戻り、1 分休憩する)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + b_n + 1 \\ &= \underline{3b_n} + \underline{1} \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(歩行者は自転車に追いつかれた後 1 分休憩し、 b_n 進む)

が成り立つことがわかる。まず、 $b_1 = 2$ と ② から

$$b_n = \underline{\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を得る。この結果と、 $a_1 = 2$ および ① から

$$a_n = \underline{\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 歩行者が $y = 300$ の位置に到着するときまでに、自転車が歩行者に追いつく回数を n 回とすると

$$2b_n \leq 300$$

$$5 \cdot 3^{n-1} \leq 301$$

$$3^{n-1} \leq 60.2$$

となる。 $3^3 = 27$, $3^4 = 81$ より

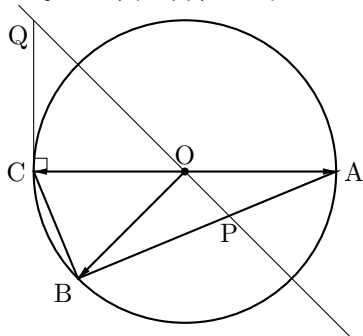
この不等式を満たす最大の整数は 4 であるから、自転車が歩行者に追いつく回数は 4 回である。

また、4 回目に自転車が歩行者に追いつく時の時刻は、

$$x = a_4 + b_4 = \frac{5}{2} \cdot 3^3 + 4 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} = 70 + 67 = \underline{137}$$

である。

- 第 5 問** 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に、3 点 A, B, C があり、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{2}{3}$ および $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ を満たすとする。 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし、線分 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を P とする。また、直線 OP 上に点 Q をとる。この図は以下になる。



(1) $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$ であるから, $\cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{-2\sqrt{5}}{3}$ である。

また, 実数 k を用いて, $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ と表せる。したがって, $\vec{OP} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$ であるから

$$\vec{OQ} = (k - kt)\vec{OA} + kt\vec{OB} \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{CQ} = (k - kt + 1)\vec{OA} + kt\vec{OB}$$

となる。 $\vec{OA}$ と $\vec{OP}$ が垂直となるのは,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = (1-t)|\vec{OA}|^2 + t\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1-t-\frac{2}{3}t=0 \text{ より, } t = \frac{3}{5}$$

以下, $t \neq \frac{3}{5}$ とし, $\angle OCQ$ が直角であるとする。

(2) $\angle OCQ$ が直角であることにより, (1) の k は

$$\begin{aligned} \vec{OC} \cdot \vec{CQ} &= -(k - kt + 1)|\vec{OA}|^2 - kt\vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ &= -k + kt - 1 + \frac{2}{3}kt = \left(-1 + \frac{5}{3}t\right)k - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから,

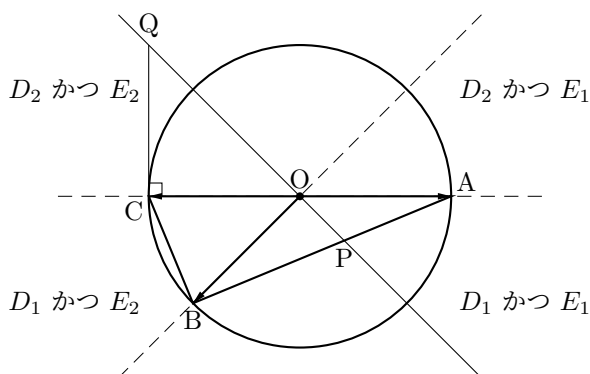
$$k = \frac{3}{5t - 3} \dots \textcircled{2}$$

となることがわかる。

平面から直線 OA を除いた部分は, 直線 OA を境に二つの部分に分けられる。そのうち, 点 B を含む部分を D_1 , 含まない部分を D_2 とする。また, 平面から直線 OB を除いた部分は, 直線 OB を境に二つの部分に分けられる。そのうち, 点 A を含む部分を E_1 , 含まない部分を E_2 とする。

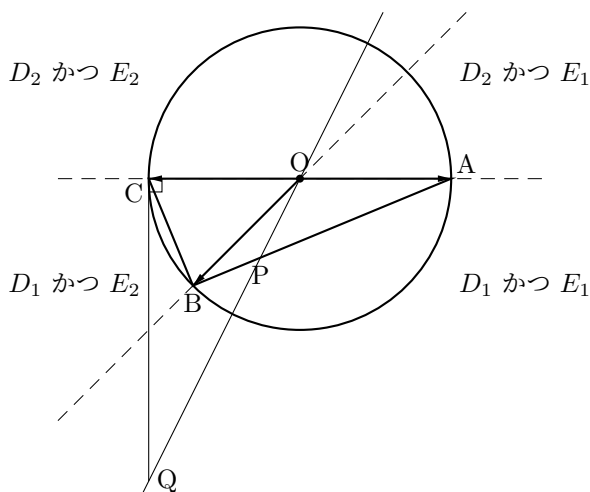
• $0 < t < \frac{3}{5}$ ならば, $0^\circ < \angle AOP < 90^\circ$ となり, 点 Q は, 点 O から見て点 P とは逆の位置にあるので,

D_2 に含まれ, かつ E_2 に含まれる。 $\textcircled{3}_s$



• $\frac{3}{5} < t < 1$ ならば, $90^\circ < \angle AOP < \angle AOB$ となり, 点 Q は, 点 O から見て点 P とは同じ位置にあるので,

D_1 に含まれ, かつ E_1 に含まれる。 $\textcircled{4}_t$



(3) 点 P の位置と $|\overrightarrow{OQ}|$ の関係について考える。

$t = \frac{1}{2}$ のとき, ② により, $k = \frac{3}{5 \cdot \frac{1}{2} - 3} = -6$ で, これらを ① に代入して

$$\overrightarrow{OQ} = \left(-6 + 6 \cdot \frac{1}{2}\right) \overrightarrow{OA} - 6 \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = -3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

となるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OQ}|^2 &= 9(|\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2) \\ &= 9\left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} + 1\right) = 9 \cdot \frac{2}{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

となる。したがって, $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{6}$ とわかる。

直線 OA に関して, $t = \frac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CR} &= -\overrightarrow{CQ} \\ &= -(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC}) = -(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OA}) \\ &= -(-3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \\ &= 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

となる。

$t \neq \frac{1}{2}$ のとき, $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{6}$ となる t の値を考える。

$$\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$$

より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

この R の位置に Q がくるとき, $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{6}$ となる。

$$\overrightarrow{OQ} = (k - kt)\overrightarrow{OA} + kt\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$$

であるから, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が一次独立であることより

$$\begin{cases} k - kt = 1 \\ kt = 3 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて, $k = 4, t = \frac{3}{4}$ となる。

したがって, t の値は $\frac{3}{4}$ である。

