令和５年度大学入学共通テスト　数学 I・数学 A 解答解説

GTS

実施日：2023/1/15　作成日：2022/1/17

第 1 問

〔１〕　実数 x についての不等式

$$|x+6| \leqq 2$$

の解は

$$-2 \leqq x+6 \leqq 2$$

より

$$\underline{\mathbf{-8}_{\text{アイ}}} \leqq x \leqq \underline{\mathbf{-4}_{\text{ウエ}}}$$

である。

よって, 実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が

$$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leqq 2$$

を満たしているとき, $1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると, $(a-b)(c-d)$ のとりうる値の範囲は

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$$

で, $1-\sqrt{3}$ が負であるから

$$\frac{-8}{1-\sqrt{3}} \geqq (a-b)(c-d) \geqq \frac{-4}{1-\sqrt{3}}$$

左右の辺を入れ替えて

$$\frac{-4}{1-\sqrt{3}} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{-8}{1-\sqrt{3}}$$

$$\frac{-4(1+\sqrt{3})}{1-3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{-8(1+\sqrt{3})}{1-3}$$

$$2(1+\sqrt{3}) \leqq (a-b)(c-d) \leqq 4(1+\sqrt{3})$$

となるので

$$\underline{\mathbf{2}_{\text{オ}}} + \underline{\mathbf{2}_{\text{カ}}}\sqrt{}\leqq(a-b)(c-d) \leqq \underline{\mathbf{4}_{\text{キ}}} + \underline{\mathbf{4}\ \text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる。

特に

$$(a-b)(c-d) = 4+4\sqrt{3} \cdots\cdots ①$$

であるとき, さらに

$$(a-b)(b-d) = -3+\sqrt{3} \cdots\cdots ②$$

が成り立つならば

① の左辺を展開して

$$ac-ad-bc-bd = 4+4\sqrt{3}$$

② の左辺を展開して

$$ab - bc - ad + cd = -3 + \sqrt{3}$$

となるので ① − ② より

$$ac - ab - cd + bd = 7 + 3\sqrt{3}$$

すなわち

$$(a-d)(c-b) = \underline{\mathbf{7}_{ケ}} + \underline{\mathbf{3}_{コ}}\sqrt{3} \cdots\cdots ③$$

〔2〕

(1) 点 O を中心とし, 半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A, B を AB = 6 となるようにとる。また, 円 O の円周上に, 2 点 A, B とは異なる点 C をとる。

(i) この円の半径を R とすると, 正弦定理より

$$2R = \frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$

よって

$$\sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{\mathrm{AB}}{2R} = \frac{6}{2\cdot 5} = \underline{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \ \text{⓪}_{サ}}$$

である。また, 点 C を ∠ACB が鈍角となるようにとるとき, $\cos\angle\mathrm{ACB} < 0$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{ACB} = -\sqrt{1-\sin^2\angle\mathrm{ACB}} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \underline{-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \ \text{⑦}_{シ}}$$

である。

(ii) 点 C を △ABC の面積が最大になるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き, 直線 AB との交点を D とするとき, △ABC は二等辺三角形になるので, 点 D は線分 AB の中点で, $\angle\mathrm{ODA} = 90^\circ$ である。このとき $\mathrm{AD} = 3,\ \mathrm{OA} = \mathrm{R} = 5$ であるから, 三平方の定理により $\mathrm{OD} = 4$。したがって,

$$\tan\angle\mathrm{OAD} = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}} = \underline{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \ \text{④}_{ス}}$$

である。また, $\mathrm{AB} = 6,\ \mathrm{CD} = 9$ であるから, △ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 9 = \underline{\mathbf{27}_{セソ}}$$

(2) 半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P, Q, R をとったとき, これらの 3 点を通る平面 α 上で $\mathrm{PQ} = 8,\ \mathrm{QR} = 5,\ \mathrm{RP} = 9$ であったとする。

球 S の球面上に点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき, その体積を求めよう。

まず, 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{QPR} &= \frac{\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2}{2\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}} \\ &= \frac{64+81-25}{2\cdot 8\cdot 9} \\ &= \frac{120}{2\cdot 8\cdot 9} = \underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}_{タチ}}\end{aligned}$$

である。これと $\sin\angle\mathrm{QPR} > 0$ より

$$\sin\angle\mathrm{QPR} = \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{QPR}} = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

ことから, △PQR の面積は

$$\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}\sin\angle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\frac{\sqrt{11}}{6} = \underline{\mathbf{6}\sqrt{\mathbf{11}}_{ツテト}}$$

である。

次に, 点 T から平面 α に垂直な直線を引き, 平面 α との交点を H とする。このとき, PH, QH, RH の長さ

について, 三角錐 TPQR の体積が最大となるとき, 点 T から 3 点 P, Q, R それぞれまでの距離が等しいから **PH = QH = RH** 6 $_{ナ}$ が成り立つ。

直線 TH と球 S との交点で点 H でない方を U とする。このとき, TH は球の中心を通るので, TU = 10 であり, $\angle\mathrm{TQU} = 90^\circ$ である。このことと $\angle\mathrm{THQ} = 90^\circ$ より, $\triangle\mathrm{TQU} \backsim \triangle\mathrm{QHU}$ となるから,

$$\mathrm{QH} : \mathrm{TH} = \mathrm{UH} : \mathrm{QH}$$

正弦定理により

$$2\mathrm{QH} = \frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{QPR}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{30}{\sqrt{11}}$$

となるので, $\mathrm{QH} = \dfrac{15}{\sqrt{11}}$ となる。また, UH = 10 − TH より

$$\begin{aligned}\mathrm{QH} : \mathrm{TH} = \mathrm{UH} : \mathrm{QH} &\Leftrightarrow \frac{15}{\sqrt{11}} : \mathrm{TH} = (10-\mathrm{TH}) : \frac{15}{\sqrt{11}} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{TH}^2 - 10\mathrm{TH} + \frac{225}{11} = 0 \\ &\Leftrightarrow 11\mathrm{TH}^2 - 110\mathrm{TH} + 225 = 0\end{aligned}$$

よって, $\mathrm{TH} = \dfrac{55 \pm \sqrt{55^2 - 11\cdot 15^2}}{11} = 5 + \dfrac{5}{11}\sqrt{22}$

以上より, 三角錐 TPQR の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PQR}\cdot\mathrm{TH} = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\left(5 + \frac{5}{11}\sqrt{22}\right) = \mathbf{10(\sqrt{11}+\sqrt{2})}_{ニヌネノハ}$$

第 2 問

〔1〕太郎さんは, 総務省が公表している 2020 年の家計調査の結果を用いて, 地域による食文化の違いについて考えている。家計調査における調査地点は, 都道府県県庁所在市および政令指定都市（都道府県県庁所在市を除く）であり, 合計 52 市である。家計調査の結果の中でも, スーパーマーケットなどで販売されている調理食品の「二人以上の世帯の 1 世帯当たり年間支出金額（以下, 支出金額, 単位は円）」を分析することにした。以下においては, 52 市の調理食品の支出金額をデータとして用いる。

太郎さんは調理食品として, 最初にうなぎのかば焼き（以下, かば焼き）に着目し, 図 1 のように 52 市におけるかば焼きの支出金額のヒストグラムを作成した。（紙面の都合上, 図 1 は省略）

(1) 図 1 から次のことが読み取れる。

- 第 1 四分位数が含まれる階級を考えると, この場合は $52 \div 4 = 13$ より, 小さい方から 13 番目の値である。1000 以上 1400 未満が 2 市, 1400 以上 1800 未満が 7 市で合わせて 9 市 であり, 1800 以上 2200 未満が 11 市である。

  よって, 第 1 四分位数が含まれる階級は **1800 以上 2200 未満** 2 $_{ア}$ である。
- 第 3 四分位数が含まれる階級を考えると, この場合は $52 \div 4 = 13$ より, 大きい方から 13 番目の値である。4600 以上 5000 未満と 4200 以上 4600 未満がそれぞれ 1 市, 3400 以上 3800 未満が 5 市で合わせて 7 市であり, 3000 以上 3400 未満が 8 市である。

  よって, 第 3 四分位数が含まれる階級は **3000 以上 3400 未満** 5 $_{イ}$ である。
- 四分位範囲を考える。四分位範囲 = 第 3 四分位数 − 第 1 四分位数 である。第 3 四分位数と第 1 四分位数の階級は上記で求めた範囲になっているので, 四分位範囲は最大でも $3400 - 1800 = 1600$ を超えることはないし, 最小でも $3000 - 2200 = 800$ を下回ることはない。

  よって, 四分位範囲は **800 より大きく 1600 より小さい** 1 $_{ウ}$ 。

(2) 太郎さんは, 東西での食文化の違いを調べるために, 52 市を東側の地域 E（19 市）と西側の地域 W（33 市）の二つに分けて考えることにした。

(i) 地域 E と地域 W について, かば焼きの支出金額の箱ひげ図を, 図 2, 図 3 のようにそれぞれ作成した。（紙面の都合上, 図 2 および図 3 は省略）

かば焼きの支出金額について, 次の 0 ～ 3 を考える。

0 地域 E において, 小さい方から 5 番目は 2000 以下のである。

図 2 より, 第 1 四分位数は 2000 ～ 2200 の間にある。この第 1 四分位数が小さい方から 5 番目の数であるから正しくない。

1 地域 E と地域 W の範囲は等しい。

明らかに, 地域 W の方が範囲が大きいので, 正しくない。

② 中央値は, 地域 E より地域 W の方が大きい。

図 2 より, 地域 E の中央値は 2200〜2600 にある。図 3 より, 地域 W の中央値は 2600〜3000 にある。したがって, 正しい。

③ 2600 未満の市の割合は, 地域 E より地域 W の方が大きい。

図 2 より, 地域 E において 2600 未満の市の割合は約 $\frac{3}{4}$ である。図 3 より, 地域 W において 2600 未満の市の割合は約 $\frac{1}{2}$ である。したがって, 正しくない。

以上より, 正しいものは $\underline{②_{\text{エ}}}$ である。

(ii) 太郎さんは, 地域 E と地域 W のデータの散らばりの度合いを数値でとらえようと思い, それぞれの分散を考えることにした。地域 E におけるかば焼きの支出金額の分散は, 地域 E のそれぞれの市におけるかば焼きの支出金額の偏差の **2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値** $\underline{②_{\text{オ}}}$ である。

(3) 太郎さんは, (2) で考えた地域 E における, やきとりの支出金額についても調べることにした。

ここでは地域 E において, やきとりの支出金額が増加すれば, かば焼きの支出金額も増加する傾向があるのではないかと考え, まず図 4 のように, 地域 E における, やきとりとかば焼きの支出金額の散布図を作成した（紙面の都合上, 図 4 は省略)。そして, 相関係数を計算するために, 表 1 のように平均値, 分散, 標準偏差および共分散を算出した。ただし, 共分散は地域 E のそれぞれの市における, やきとりの支出金額の偏差とかば焼きの支出金額の偏差との積の平均値である。

表 1　地域 E における, やきとりとかば焼きの支出金額の平均値, 分散, 標準偏差および共分散

	平均値	分　散	標準偏差	共分散
やきとりの支出金額	2810	348100	590	12400
かば焼きの支出金額	2350	324900	570	

表 1 を用いると, 地域 E における, やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は

$$\frac{12400}{590 \cdot 570} = \frac{1240}{3363} = 0.374665477 \cdots$$

より, $\underline{\mathbf{0.37}\ ⑦_{\text{カ}}}$ である。

〔2〕 太郎さんと花子さんは, バスケットボールのプロ選手の中には, リングと同じ高さでシュートを打てる人がいることを知り, シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。

二人は, 図 1 のように座標軸が定められた平面上に, プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき, ボールがリングが入った場合について, 後の**仮定**を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが, 以下では省略する（紙面の都合上, 図 1 は省略)。

仮定

- 平面上では, ボールを直径 0.2 の円とする。
- リングを真横から見たときの左端を点 A(3.8, 3), 右端を点 B(4.2, 3) とし, リングの太さは無視する。
- ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り, かつ, ボールの中心が AB の中点 M(4, 3) を通る場合を考える。ただし, ボールがリングに当たるとは, ボールの中心と A または B との距離が 0.1 以下になることとする。
- プロ選手がシュートを打つ場合のボールの中心を点 P とし, P は, はじめに点 $P_0(0,\ 3)$ にあるものとする。また, P_0, M を通る, 上に凸の放物線を C_1 とし, P は C_1 上を動くものとする。
- 花子さんがシュートを打つ場合のボールの中心を点 H とし, H は, はじめに点 $H_0(0,\ 2)$ にあるものとする。また, H_0, M を通る, 上に凸の放物線を C_2 とし, H は C_2 上を動くものとする。
- 放物線 C_1 や C_2 に対して, 頂点の y 座標を「**シュートの高さ**」とし, 頂点の x 座標を「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」とする。

(1) 放物線 C_1 の方程式における x^2 の係数を a, x の係数を b とする。 y 切片は 3 であるから, 放物線 C_1 の方程

式は $y = ax^2 + bx + 3$ となる。C_1 は $\mathrm{M}(4,\ 3)$ を通るので,

$$3 = a \cdot 4^2 + b \cdot 3 + 3 \Leftrightarrow 16a + 4b + 4 = 3$$

より $b = -4a$ となるので,

$$y = ax^2 - \underline{\mathbf{4}_{\text{キ}}}ax + \underline{\mathbf{3}_{\text{ク}}}$$

と表すことができる。また, C_1 は

$$y = a(x-2)^2 - 4a + 3$$

と変形できるので, プロ選手の「**シュートの高さ**」は

$$-\underline{\mathbf{4}_{\text{ケ}}} + \underline{\mathbf{3}_{\text{コ}}}$$

である。放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とし, x の係数を q とすると, 同様にして

$$q = \frac{1-16p}{4}$$

となるから,

$$y = p\left\{x - \left(2 - \frac{1}{8p}\right)\right\}^2 - \frac{(16p-1)^2}{64p} + 2$$

と表すことができる。

プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の比較の記述として, 正しいものは, プロ選手の場合は 2, 花子さんの場合は $2-\dfrac{1}{8p}$ となることから, 花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が, 常に

(2) 二人は, ボールがリングすれすれを通る場合のプロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」について次のように話している。

> 太郎: 例えば, プロ選手のボールがリングに当たらないようにするには, P がリングの左端 A のどのくらい上を通れば良いのかな。
>
> 花子: A の真上の点で P が通る点 D を, 線分 DM が A を中心とする半径 0.1 の円と接するようにとって考えてみたらどうかな。
>
> 太郎: なるほど。P の軌道は上に凸の放物線で山なりだから, その場合, 図 2 のように, P は D を通った後で線分 DM より上側を通るのでボールはリングに当たらないね。花子さんの場合も, H がこの D を通れば, ボールはリングに当たらないね。(紙面の都合上, 図 2 は省略)
>
> 花子: 放物線 C_1 と C_2 が D を通る場合でプロ選手と私の「**シュートの高さ**」を比べてみようよ。

図 2 のように, M を通る直線 ℓ が, A を中心とする半径 0.1 の円に直線 AB の上側で接しているとする。また, A を通り直線 AB に垂直な直線を引き, ℓ との交点を D とする。このとき, $\mathrm{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{15}$ である（この AD の計算には数学 II「図形と方程式」の知識が必要)。

よって, 放物線 C_1 が D を通るとき, C_1 の方程式は $y = ax^2 - 4ax + 3$ に点 D の座標 $\left(\dfrac{19}{5},\ 3 + \dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)$ を代入して $\left(\because\ 3.8 = \dfrac{19}{5},\ \text{点 A の } y \text{ 座標より, 点 D の } y \text{ 座標は } \dfrac{\sqrt{3}}{15} \text{ 上にある}\right)$

$$3 + \frac{\sqrt{3}}{15} = \frac{361}{25}a - \frac{380}{25}a + 3$$
$$-\frac{19}{25}a = \frac{\sqrt{3}}{15}$$
$$a = -\frac{\sqrt{3}}{15} \cdot \frac{25}{19} = -\frac{5\sqrt{3}}{57}$$

となるので,

$$y = -\underline{\frac{\mathbf{5\sqrt{3}}}{\mathbf{57}}_{\text{シスセソ}}}(x^2 - 4x) + 3$$

となる。　また, 放物線 C_2 が D を通るとき, (1) で与えられた C_2 の方程式を用いると, 花子さんの「**シュートの高さ**」は約 3.4 と求められる。

以上のことから, 放物線 C_1 と C_2 が D を通るとき, プロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」を比較すると, プロ選手の「**シュートの高さ**」は $3+\dfrac{\sqrt{3}}{15} \fallingdotseq 3.11547053\cdots$ より, **プロ選手** $\underline{⓪_{タ}}$ の「**シュートの高さ**」の方が大きく, その差は $0.2845299\cdots$ となるのでボール **約 1 個分** $\underline{⓪_{チ}}$ である。

第 3 問　番号によって区別された複数の球が, 何本かのひもでつながれている。ただし, 各ひもはその両端で二つの球をつなぐものとする。次の**条件**を見た球の塗り分け方（以下, 球の塗り方）を考える。

条件

- それぞれの球を, 用意した 5 色（赤, 青, 黄, 緑, 紫）のうちいずれか 1 色で塗る。
- 1 本のひもでつながれた二つの球は異なる色になるようにする。
- 同じ色を何回使ってもよく, また使わない色があってもよい。

例えば図 A では, 三つの球が 2 本のひもでつながれている。この三つの球を塗るとき, 球 1 の塗り方が 5 通りあり, 球 1 を塗った後, 球 2 の塗り方は 4 通りあり, さらに球 3 の塗り方は 4 通りある。したがって, 球の塗り方の総数は 80 である。（紙面の都合上, 図 A は省略）

(1)　図 B において, 球の塗り方を考える。図 A と同様に考えればよいので, 球 1 の塗り方が 5 通りあり, 球 1 を塗った後, 球 2 の塗り方は 4 通りあり, さらに球 3 と球 4 の塗り方も 4 通りある。したがって, 球の塗り方は $5\times4\times4\times4=\underline{\mathbf{320}_{アイウ}}$ 通りある。（紙面の都合上, 図 B は省略）

(2)　図 C において, 球の塗り方を考える。球 1 の塗り方が 5 通りあり, 球 1 を塗った後, 球 2 の塗り方は 4 通りある。さらに球 1 と球 2 を塗った後, 球 3 の塗り方は 3 通りある。したがって, 球の塗り方は $5\times4\times3=\underline{\mathbf{60}_{エオ}}$ 通りある。（紙面の都合上, 図 C は省略）

(3)　図 D における球の塗り方のうち, 赤をちょうど 2 回使う塗り方を考える。赤がちょうど 2 回使う塗り方は, 球 1 と球 3 が赤の場合と球 2 と球 4 が赤の場合の 2 通りある。どちらも赤以外の塗り方は $4\times4=16$ 通りあるので, 求める塗り方は $2\times16=\underline{\mathbf{32}_{カキ}}$ 通りある。（紙面の都合上, 図 D は省略）

(4)　図 E における 球の塗り方のうち, 赤をちょうど 3 回使い, かつ青をちょうど 2 回使う塗り方を考える。球 1 と球 2 〜 6 は同じ色にならないので, 球 1 は赤と青以外の 3 通りある。残りの球 2 〜 6 の塗り方は, どれも同じ色になってもよいので, 赤 3 回と青 2 回を順に塗る順列と等しい。よって, 求める塗り方は $3\times\dfrac{5!}{3!2!}=\underline{\mathbf{30}_{カキ}}$ 通りある。（紙面の都合上, 図 E は省略）

(5)　図 D において, 球の塗り方の総数を求める。

そのために, 次の**構想**を立てる。

構想

図 D と図 F を比較する。（紙面の都合上、図 F は省略）

図 F では球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方が可能であるため, 図 D よりも図 F の球の塗り方の総数が大きい。

図 F における球の塗り方は, 図 B における球の塗り方と同じであるため, 全部で 320 通りある。そのうち球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方の総数と一致する図として, 正しいものは, 球 3 と球 4 が重なっているものと一緒なので $\underline{②_{コ}}$ である。これは, 図 C と同じである。したがって, 図 D における球の塗り方は $320-60\underline{\mathbf{260}_{サシス}}$ 通りある。

(6)　図 G において, 球の塗り方を考える。これは, 球 1 と球 5 のひもを除いた塗り方から, 図 D の塗り方を除けばよいので, $5\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4-260=1280-260=\underline{\mathbf{1020}_{セソタチ}}$ 通りある。（紙面の都合上、図 F は省略）

第 4 問　色のついた長方形を並べて正方形や長方形を作ることを考える。色のついた長方形は, 向きを変えずに隙間なく並べることとし, 色のついた長方形は十分にあるものとする。

(1)　横の長さが 462 で縦の長さが 110 である赤い長方形を, 図 1 のように並べて正方形や長方形を作ることを考える。（紙面の都合上、図 1 は省略）

462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは, $462=2\cdot3\cdot7\cdot11$, $110=2\cdot5\cdot11$ となるので, $\underline{\mathbf{11}_{アイ}}$ である。

赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち, 辺の長さが最小であるものは, 462 と 110 の最小公倍数を求めて, 一辺の長さが $\underline{\mathbf{2310}_{ウエオカ}}$ のものである。　また, 赤い長方形を並べて正方形ではない長方形を作るとき, 横の長さと縦の長さの差の絶対値が最小になるのは, 462 の約数（1, 2, 3, 6, 7, 11, 14, 21, 22, 33, 42, 66, 77, 154, 231, 462）と 110（1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110） の約数を考えると, 差の絶対値が最大公約数と等しく $\underline{\mathbf{22}_{キク}}$ になるときであることがわかる。

縦の長さが横の長さより 22 長い長方形のうち, 横の長さが最小であるものは, $462\times1=462$, $462\times2=924$, $462\times3=$

1386 のときは 110 の倍数との差の絶対値が 22 となるときがないので, $462 \times 4 = \underline{\mathbf{1848}_{ケコサシ}}$ のものである。このとき, $110 \times 17 = 1870$ となり, 差の絶対値が 22 となる。

(2) 花子さんと太郎さんは, (1) で用いた赤い長方形を 1 枚以上並べて長方形を作り, その右側に横の長さが 363 で縦の長さが 154 である赤い長方形を 1 枚以上並べて, 図 2 のような正方形や長方形を作ることを考えている（紙面の都合上, 図 2 は省略)。

このとき, 赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと, 青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さは等しい。よって, 図 2 のような長方形のうち, 縦の長さが最小のものは, 赤い長方形の縦の長さ $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$ と青い長方形の縦の長さ $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ の最小公倍数であるから, $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \underline{\mathbf{770}_{スセソ}}$ のものであり, 図 2 のような長方形は縦の長さが 770 の倍数である。

二人は, 次のように話している。

花子： 赤い長方形と青い長方形を図 2 のように並べて正方形を作ってみようよ。

太郎： 赤い長方形の横の長さが 462 で青い長方形の横の長さが 363 だから, 図 2 のような正方形の横の長さは 462 と 363 を組み合わせて作ることができる長さでないといけないね。

花子： 正方形だから, 横の長さは 770 の倍数でもないといけないね。

462 と 363 の最大公約数は $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, $3633 \cdot 11^2$ より $\underline{\mathbf{33}_{タチ}}$ であり, 33 の倍数のうちで 770 の倍数でもある最小の正の整数は 33 と 770 の最小公倍数であるから $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \underline{\mathbf{2310}_{ツテトナ}}$ である。

これらのことと, 使う長方形の枚数が赤い長方形も青い長方形も 1 枚以上であることから, 図 2 のような正方形のうち, 辺の長さが最小であるものは, 2310 の倍数のうち, 462 と 363 の差の絶対値の最小値 99 で割り切れる数となるので, $2310 \times 3 = \underline{\mathbf{6930}_{ニヌネノ}}$ であることがわかる。

第 5 問 (1) 円 O に対して, 次の**手順 1** で作図を行う。

手順 1

(Step 1) 円 O と異なる 2 点で交わり, 中心 O を通らない直線 ℓ を引く。円 O と直線 ℓ との交点を A, B とし, 線分 AB の中心 C をとる。

(Step 2) 円 O の周上に, 点 D を $\angle$COD が鈍角となるようにとる。直線 CD を引き, 円 O との交点で D とは異なる点を E とする。

(Step 3) 点 D を通り直線 OC に垂直な直線を引き, 直線 OC との交点を F とし, 円 O との交点で D とは異なる点を G とする。

(Step 4) 点 G における円 O の接線を引き, 直線 ℓ との交点を H とする。

このとき, 直線 ℓ と点 D の位置によらず, 直線 EH は円 O の接線である。このことは, 次の **構想** に基づいて, 後のように説明できる。

構想

直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには, 接弦定理より, $\angle \mathrm{OEH} = \underline{\mathbf{90}_{アイ}}^\circ$ であることを示せばよい。

手順 1 の (Step 1) と (Step 4) により, 4 点 C, G, H, $\underline{\mathbf{O}\ ③_{ウ}}$ は同一円周上にあることが分かる。よって, 円に内接する四角形の性質より, $\angle$CHG $=$ $\underline{\angle\text{FOG}\ ④_{オ}}$ である。一方, 点 E は円 O の周上にあることから, 円周角の定理により, $\angle$FOG $=$ $\underline{\angle\text{DEG}\ ③_{オ}}$ が分かる（$\angle$FOG は円周角 $\angle$DEG に対する中心角 $\angle$DOG の半分になる)。よって, $\angle$CHG $=$ $\angle$DEG となるので, 4 点 C, G, H, $\underline{\mathbf{E}\ ②_{ニヌネノ}}$ は同一円周上にある。この円が点 O を通ることにより $\angle \mathrm{OEH} = 90^\circ$ を示すことができる。

(2) 円 O に対して, (1) の**手順 1** とは直線 ℓ の引き方を変え, 次の**手順 2** で作図を行う。

手順 2

(Step 1)　円 O と共有点をもたない直線 ℓ を引く。中心 O から直線 ℓ に垂直な直線を引き, 直線 ℓ との交点を P とする。

(Step 2)　円 O の周上に, 点 Q を $\angle\mathrm{POQ}$ が鈍角となるようにとる。直線 PQ を引き, 円 O との交点で Q とは異なる点を R とする。

(Step 3)　点 Q を通り直線 OP に垂直な直線を引き, 円 O との交点で Q とは異なる点を S とする。

(Step 4)　点 S における円 O の接線を引き, 直線 ℓ との交点を T とする。

このとき, 直線 OP と線分 QS との交点を T とすると, **手順 2** の (Step 1) と (Step 4) により, 4 点 O, S, T, R は同一円周上にあることが分かる。よって, 円に内接する四角形の性質より, $\angle\mathrm{PTS} = \angle\mathrm{UOS}$ である。一方, 点 R は円 O の周上にあることから, 円周角の定理により, $\angle\mathrm{UOS} = \angle\mathrm{QRS}$ が分かる（$\angle\mathrm{UOS}$ は円周角 $\angle\mathrm{QRS}$ に対する中心角 $\angle\mathrm{QOS}$ の半分になる)。よって, $\underline{\angle\mathrm{PTS} = \angle\mathrm{QRS}\ ③_{\text{キ}}}$ である。

円 O の半径が $\sqrt{5}$ で, $\mathrm{OT} = 3\sqrt{6}$ であったとする。4 点 O, S, T, R を通る円は, $\angle\mathrm{ORT} = 90^\circ$ になることから OT が直径となり, $\angle\mathrm{OPT} = 90^\circ$ であることより, 点 P も通る。したがって, 3 点 O, P, R を通る円の半径は $\frac{1}{2}\mathrm{OT} = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{6} = \underline{\boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{2}}_{\text{クケコ}}}$ である。また, $\mathrm{OR} = \sqrt{5}$ と $\triangle\mathrm{OTR}$ が直角三角形であることより

$$\mathrm{RT} = \sqrt{\mathrm{OT}^2 - \mathrm{OR}^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{54-5} = \sqrt{49} = \underline{\mathbf{7}_{\text{サ}}}\text{である。}$$