令和５年度大学入学共通テスト　数学 II・数学 B 解答解説

GTS

実施日：2023/1/15　作成日：2023/1/31

第 1 問

〔１〕　三角関数の値の大小関係について考えよう。

(1)　$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから, $\sin x \underline{< \ 0_{ア}} \sin 2x$ であり, $x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x = \sin\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x = \sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから, $\sin x \underline{> \ 2_{イ}} \sin 2x$ である。

(2)　$\sin x$ と $\sin 2x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。

$$\begin{aligned}\sin 2x - \sin x &= 2\sin x\cos x - \sin x\\ &= \sin x\left(\underline{\mathbf{2}_{ウ}}\cos x - \underline{\mathbf{1}_{エ}}\right)\end{aligned}$$

であるから, $\sin 2x - \sin x > 0$ が成り立つことは

「$\sin x > 0$ かつ $2\cos x - 1 > 0$」……①

または

「$\sin x < 0$ かつ $2\cos x - 1 < 0$」……②

が成り立つことと同値である。$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき, ① が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \pi \text{ かつ } 0 < x < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$$

より

$$0 < x < \frac{\pi}{\underline{\mathbf{3}_{オ}}}$$

であり, ② が成り立つような x の値の範囲は

$$\pi < x < 2\pi \text{ かつ } \pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

より

$$\pi < x < \frac{\underline{\mathbf{5}_{カ}}}{\underline{\mathbf{3}_{キ}}}\pi$$

であり。よって, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき, $\sin 2x > \sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{3},\ \pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

である。

(3)　$\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を調べよう。

三角関数の加法定理を用いると, 等式

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ③$$

が得られる。$\alpha+\beta = 4x,\ \alpha-\beta = 3x$ を満たす $\alpha,\ \beta$ に対して ③ を用いることにより, $\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは

$$\alpha = \frac{7}{2}x,\ \beta = \frac{\pi}{2}$$

であるから

「$\cos\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$ ⓐ$_{ク}$ > 0 かつ $\sin\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ ⑦$_{ケ}$ > 0」……④

または

「$\cos\dfrac{7}{2}x < 0$ かつ $\sin\dfrac{\pi}{2} < 0$」……⑤

が成り立つことと同値であることがわかる。

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき, $0 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より, $\sin x \leqq 0$ であるから, ⑤ を満たす満たす x は存在しない。したがって, ④ により, $\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つ範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{\mathbf{7}_{コ}}\pi,\ \frac{\mathbf{3}_{サ}}{\mathbf{7}_{シ}}\pi < x < \frac{\mathbf{5}_{ス}}{\mathbf{7}_{セ}}\pi$$

である。

(4) (2), (3) の考察から,

(2) の x を $2x$ と置き換えると, $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき, $\sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi \cdots\cdots ⑥$$

である。

(3) より, $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき, $\sin 3x > \sin 4x$ が成り立つような x の範囲は

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi,\ \frac{5}{7}\pi < x \cdots\cdots ⑦$$

である。

⑥, ⑦ より, $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき, $\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の範囲は

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{\mathbf{6}_{ソ}}\pi,\ \frac{5}{7}\pi < x < \frac{\mathbf{5}_{タ}}{\mathbf{6}_{チ}}\pi$$

〔２〕(1) $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ のとき, $\log_a b = x$ とおくと, $\boldsymbol{a^x = b}$ ②$_{ツ}$ が成り立つ。

(2) 様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

(i) $\log_5 25 = \mathbf{2}_{テ}$, $\log_9 27 = \dfrac{\mathbf{3}_{ト}}{\mathbf{2}_{ナ}}$ であり, どちらも有理数である。

(ii) $\log_2 3$ が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると, $\log_2 3 > 0$ であるので, 二つの自然数 $p,\ q$ を用いて $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ と表すことができる。このとき, (1) により $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ は $2^{\frac{p}{q}} = 3$ であるから $\boldsymbol{2^p = 3^q}$ ⑤$_{ニ}$ と変形できる。いま, 2 は偶数であり 3 は奇数であるので, $2^p = 3^q$ を満たす自然数 $p,\ q$ は存在しない。

したがって, $\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

(iii) a, b を 2 以上の自然数とするとき, (ii) と同様に考えると,「**$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のいずれか一方が偶数で, もう一方が奇数** ⑤$_{ヌ}$ ならば $\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。

第 2 問

〔１〕(1) k を実数とし, つぎの 3 次関数を考える。

$$f(x) = x^2(k - x)$$

$y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $(0,\ 0)$ と $\left(\boldsymbol{k}\ ④_{ア},\ 0\right)$ である。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は, $f(x) = -x^3 + kx^2$ であるから

$$f'(x) = \mathbf{-3}_{イウ}x^2 + \mathbf{2}_{エ}kx$$

である。$f'(x) = -x(3x - 2k)$ となるので $k > 0$ より

$x = \mathbf{0}$ ⓪$_{オ}$ のとき, $f(x)$ は極小値 $f(0) = \mathbf{0}$ ⓪$_{カ}$ をとる。

$x = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{k}$ ③$_{キ}$ のとき, $f(x)$ は極大値 $f\left(\dfrac{2}{3}k\right) = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{27}}\boldsymbol{k^3}$ ⑨$_{キ}$ をとる。

また, $0 < x < k$ の範囲において, $x = \dfrac{2}{3}k$ のとき $f(x)$ は最大となることがわかる。

(2)　底面が半径 9 の円で高さが 15 の円錐に内接する円柱を考える。円柱の底面の半径と体積をそれぞれ x, V とする。V を x の式で表すと, 円柱の高さは $15-\dfrac{5}{3}\boldsymbol{x}$ であるから

$$V=\pi x^2\left(15-\frac{5}{3}x\right)=\frac{\mathbf{5}_{\text{ケ}}}{\mathbf{3}_{\text{コ}}}\pi x^2\left(\mathbf{9}_{\text{サ}}-x\right)\quad(0<x<9)$$

である。(1) の考察より, $k=9$ であるから $x=\dfrac{2}{3}k=\mathbf{6}_{\text{シ}}$ のとき V は最大となることが分かる。V の最大値は $\dfrac{5}{3}\pi\cdot\dfrac{4}{27}k^3=\mathbf{180}_{\text{スセソ}}\pi$ である。

〔２〕(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx$ の値は

$$\begin{aligned}\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx&=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^{30}\\&=\frac{1}{10}\cdot 3-^{2}+3\cdot 30\\&=90+90=180\end{aligned}$$

より $\mathbf{180}_{\text{タチツ}}$ である。

また, 関数 $\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$ の不定積分は

$$\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{\mathbf{300}_{\text{テトナ}}}x^3-\frac{1}{\mathbf{12}_{\text{ニヌ}}}x^2+\mathbf{5}_{\text{ネ}}x+C$$

である。ただし, C は積分定数とする。

(2)　ある地域では, 毎年３月頃「ソメイヨシノ（桜の種類）の開花予想日」が話題になる。太郎さんと花子さんは, 開花日時を予想する方法の一つに, ２月に入ってからの気温を時間の関数とみて, その関数を積分した値をもとにする方法があることを知った。ソメイヨシノの開花日時を予想するために, 二人は図１（図は省略）の６時間ごとの気温の折れ線グラフを見ながら, 次のように考えることにした。

x の値の範囲を 0 以上の実数全体として, 2 月 1 日午前 0 次から $24x$ 時間経った時点を x 日後とする。（例えば, 10.3 日後は 2 月 11 日午前 7 時 12 分を表す。）また, x 日後の気温を y ℃とする。このとき, y は x の関数であり, これを $y=f(x)$ とおく。ただし, y は負にはならないものとする。

気温を表す関数 $f(x)$ を用いて二人はソメイヨシノの開花日時を次の設定で考えることにした。

設定

正の実数 t に対して, $f(x)$ を 0 から t まで積分した値を $S(t)$ とする。すなわち, $S(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ とする。この $S(t)$ が 400 に到達したとき, ソメイヨシノが開花する。

設定 のもと, 太郎さんは気温を表す関数 $y=f(x)$ のグラフを図２（図は省略）のように直線とみなしてソメイヨシノの開花日時を考えることにした。

(i)　太郎さんは

$$f(x)=\frac{1}{5}x+3\quad(x\geqq 0)$$

として考えた。このとき,

$$\frac{1}{10}t^2+3t\geqq 400$$

を解くと

$$(t+80)(t-50)\geqq 0$$

となるので, $t\geqq 50$ より, ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから, **50 日後** 4ノ となる。

(ii)　太郎さんと花子さんは, 2 月に入ってから 30 日後以降の気温について話をしている。

太郎：１次関数を用いてソメイヨシノの開花日時を求めてみたよ。
花子：気温の上がり方から考えて, 2 月に入ってから 30 日後以降の気温を表す関数が 2 次関数の場合も考えてみようか。

花子さんは気温を表す関数 $f(x)$ を, $0 \leqq x \leqq 30$ のときは太郎さんと同じように

$$f(x)=\frac{1}{5}x+3\cdots\cdots①$$

とし, $x \geqq 30$ のときは

$$f(x)=\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\cdots\cdots②$$

として考えた。なお, $x=30$ のとき ① の右辺の値と ② の右辺の値は一致する。花子さんの考えた式を用いて, ソメイヨシノの開花日時を考えよう。(1) より

$$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=180$$

であり

$$\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=115$$

となることが分かる。

また, $x \geqq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加する。よって

$$\int_{30}^{40}f(x)dx\underline{<\ ⓪_{\text{ハ}}}\int_{40}^{50}f(x)dx$$

であることがわかる。以上より, ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから

40 日後より後, かつ 50 日後より前 ④ヒ となる。

第 3 問

(1) ある生産地で生産されるピーマン全体を母集団とし, この母集団におけるピーマン 1 個の重さ（単位は g ）を表す確率変数を X とする。m と σ を正の実数とし, X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとする。

(i) この母集団から 1 個のピーマンを無作為に抽出したとき, 重さが m g 以上である確率 $P(X \geqq m)$ は, m が平均値となっていることより

$$P(X \geqq m)=P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq \underline{\mathbf{0}_{\text{ア}}}\right)=\frac{\underline{\mathbf{1}_{\text{イ}}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{ウ}}}}$$

である。

(ii) 母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 $X_1,\ X_2,\ \cdots, X_n$ の標本平均を $\overline{X}$ とする。$\overline{X}$ の平均（期待値）と標準偏差はそれぞれ

$$E(\overline{X})=\underline{\boldsymbol{m}\ ④_{\text{エ}}},\quad \sigma(\overline{X})=\underline{\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\ ②_{\text{オ}}}$$

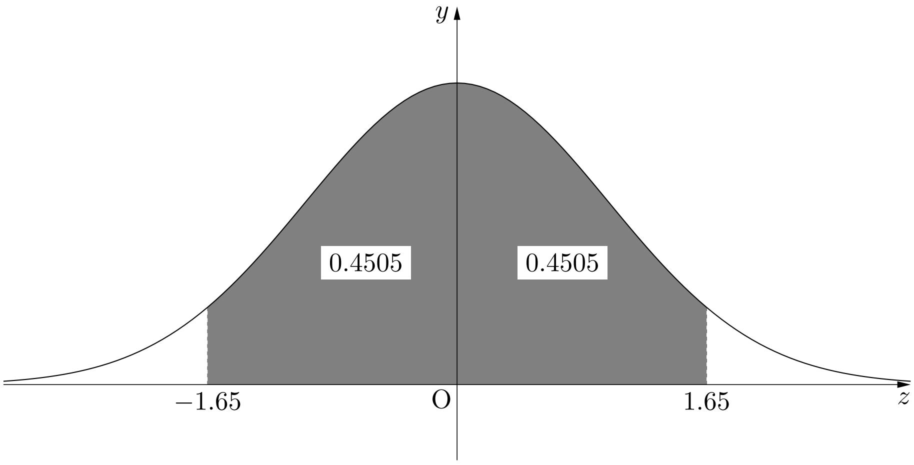
となる。

$n=400$, 標本平均が 30.0 g, 標本の標準偏差が 3.6 g のとき, m の信頼度 90 % の信頼区間を次の**方針**で求めよう。

方針

Z を標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数として, $P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0)=0.901$ となる z_0 を正規分布表から求める。この z_0 を用いると m の信頼度 90.1 % の信頼区間が求められるが, これを信頼度 90 % の信頼区間とみなして考える。

方針において, 正規分布表から $0.901 \div 2 = 0.4505$ となる z_0 を求めると, $z_0 = \underline{\mathbf{1.65}_{\text{カキク}}}$ である。



一般に, 標本の大きさ n が大きいときには, 母標準偏差の代わりに, 標本の標準偏差を用いてよいことが知られている。$n = 400$ は十分に大きいので, **方針**に基づくと, m の信頼度 90 % の信頼区間は

$$30.0 - 1.65 \cdot \frac{3.6}{\sqrt{400}} \leqq m \leqq 30.0 + 1.65 \cdot \frac{3.6}{\sqrt{400}}$$
$$30.0 - 0.297 \leqq m \leqq 30.0 + 0.297$$
$$29.703 \leqq m \leqq 30.297$$

より, $\underline{\boldsymbol{29.7 \leqq m \leqq 30.3}\ 4_{ケ}}$ となる。

(2) (1) の確率変数 X において, $m = 30.0$, $\sigma = 3.6$ とした母集団から無作為にピーマンを 1 個ずつ抽出し, ピーマン 2 個を 1 組にしたものを袋に入れていく, このようにしてピーマン 2 個を 1 組にしたものを 25 袋作る。その際, 1 袋ずつの重さの分散を小さくするために, 次の**ピーマン分類法**を考える。

ピーマン分類法

無作為に抽出したいくつかのピーマンについて, 重さが 30.0g 以下のときを S サイズ, 30.0 g を超えるときは L サイズと分類する。そして, 分類されたピーマンから S サイズと L サイズのピーマンを一つずつ選び, ピーマン 2 個を 1 組とした袋を作る。

(i) ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき, **ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率 p_0 を考えよう。無作為に 1 個抽出したピーマンが S サイズである確率は $\underline{\dfrac{\mathbf{1}_{コ}}{\mathbf{2}_{サ}}}$ である。ピーマンを無作為に 50 個抽出したときの S サイズのピーマンの個数を表す確率を U_0 とすると, U_0 は二項分布 $B\left(50,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うので

$$p_0 = {}_{50}\mathrm{C}_{\underline{\mathbf{25}_{シス}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{50-25}$$

となる。

p_0 を計算すると, $p_0 = 0.1122\cdots$ となることから, ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき, 25 袋作ることができる確率は 0.11 程度とわかる。

(ii) **ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率が 0.95 以上となるようなピーマンの個数を考えよう。

k を自然数とし, ピーマンを無作為に $(50 + k)$ 個抽出したとき, S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると, U_k は二項分布 $B\left(50 + k,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

$(50 + k)$ は十分に大きいので, $n = 50 + k$, $p = \dfrac{1}{2}$, $q = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ とすると, $np = \dfrac{50 + k}{2}$, $npq = \dfrac{50 + k}{4}$ であるから, U_k は近似的に正規分布 $N\left(\underline{\boldsymbol{\dfrac{50 + k}{2}}\ 3_{セ}},\ \underline{\boldsymbol{\dfrac{50 + k}{4}}\ 7_{ソ}}\right)$ に従い, $Y = \dfrac{U_k - \dfrac{50 + k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50 + k}{4}}}$ とすると, Y は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって, **ピーマン分類法**で, 25 袋作ることができる確率を p_k とすると $25 - \dfrac{50 + k}{2} = -\dfrac{k}{2}$ より

$$p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25 + k) = P\left(-\frac{\underline{\boldsymbol{k}\ 0_{タ}}}{\sqrt{50 + k}} \leqq Y \leqq \frac{k}{\sqrt{50 + k}}\right)$$

となる。

$k = \alpha$, $\sqrt{50 + k} = \beta$ とおく。

$p_k \geqq 0.95$ となるような $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について, 正規分布表から $\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 1.96$ を満たせばよいことがわかる。ここでは

$$\frac{\alpha}{\beta} \geqq 2$$

を満たす自然数 k を考えることとする。① の両辺は正であるから, $\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ を満たす最小の k を k_0 とすると, $k^2 \geqq 4(50+k)$ から, $k^2-4k-200=0$ を解くと, $\sqrt{51}=7.14$ として

$$\begin{aligned} k &= 2 \pm \sqrt{4+200} \\ &= 2 \pm 2\sqrt{51} \\ &= 2 \pm 2 \cdot 7.14 \\ &= 2 \pm 14.28 \end{aligned}$$

より, $k>0$ であるから, $k = 2+14.28 = 16.28$

よって, $k^2-4k-200 \geqq 0$ の解は, $k \geqq 16.28$ より, $k_0 = \underline{\mathbf{17}_{\text{チツ}}}$ であることがわかる。

したがって, 少なくとも $(50+17)$ 個のピーマンを抽出しておけば, **ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる。

第 4 問　花子さんは, 毎年の初めに預金口座に一定額の入金することにした。この入金を初める前における花子さんの預金は 10 万円である。ここで, 預金とは預金口座にあるお金の額のことである。預金には年利 1 % で利息がつき, ある年の初めの預金が x 万円であれば, その年の終わりには預金は $1.01x$ 万円となる。次の年の初めには $1.01x$ 万円に入金額を加えたものが預金となる。

毎年の初めの入金額を p 万円とし, n 年目の初めの預金を a_n 万円とおく。ただし, $p>0$ とし, n は自然数とする。

例えば, $a_1 = 10+p,\ a_2 = 1.01(10+p)+p$ である。

(1)　a_n を求めるために二つの方針で考える。

方針１

n 年目の初めの預金と $(n+1)$ 年目の初めの預金との関係に着目して考える。

3 年目の初めの預金 a_3 万円について, $a_3 = 1.01a_2+p = \underline{\mathbf{1.01\{1.01(10+p)+p\}+p}\ ②_{\text{ア}}}$ である。すべての自然数 n について

$$a_{n+1} = \underline{\mathbf{1.01}\ ⓪_{\text{イ}}}\,a_n + \underline{\boldsymbol{p}\ ③_{\text{ウ}}}$$

が成り立つ。これは

$$\alpha = 1.01\alpha + p$$

を解くと $\alpha = -100p$ となることから

$$a_{n+1} + \underline{\mathbf{100}\boldsymbol{p}\ ④_{\text{エ}}} = \underline{\mathbf{1.01}\ ⓪_{\text{オ}}}(a_n+100p)$$

と変形でき, a_n を求めることができる。

方針２

もともと預金口座にあった 10 万円と毎年の初めに入金した p 万円について, n 年目の初めにそれぞれがいくらになるかに着目して考える。

もともと預金口座にあった 10 万円は, 2 年目の初めには 10×1.01 万円になり, 3 年目の初めには 10×1.01^2 万円になる。同様に考えると n 年目の初めには $10 \times 1.01^{n-1}$ 万円になる。

- 1 年目の初めに入金した p 万円は, n 年目の初めには $p \times 1.01^{\underline{\boldsymbol{n-1}\ ②_{\text{カ}}}}$ になる。
- 2 年目の初めに入金した p 万円は, n 年目の初めには $p \times 1.01^{\underline{\boldsymbol{n-2}\ ③_{\text{キ}}}}$ になる。
- n 年目の初めに入金した p 万円は, n 年目の初めには p 万円のままである。

これより

$$\begin{aligned} a_n &= 10 \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-2} + \cdots + p \\ &= 10 \times 1.01^{n-1} + p\sum_{k=1}^{n} 1.01^{\underline{\boldsymbol{k-1}\ ②_{\text{ク}}}} \end{aligned}$$

となることがわかる。ここで, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1.01^{k-1} = \frac{1.01^n-1}{1.01-1} = \underline{\mathbf{100(1.01^{\boldsymbol{n}}-1)}\ ①_{\text{ケ}}}$ となるので, a_n を求める。

(2)　花子さんは, 10 年目の預金が 30 万円以上になるための入金額について考えた。

10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと $\underline{\mathbf{1.01}\boldsymbol{a_{10}}\ ③_{\text{コ}}} \geqq 30$ となる。この不等式を p について解くと $1.01a_{10} = 1.01\{10 \times 1.01^{10-1} + 100(1.01^{10} - 1)p = 10 \times 1.01^{10} + 101(1.01^{10} - 1)p$ より

$$p \geqq \frac{\underline{\mathbf{30}_{\text{サシ}}} - \underline{\mathbf{10}_{\text{スセ}}} \times 1.01^{10}}{101\left(1.01^{10} - 1\right)}$$

となる。したがって, 毎年の初めの入金額が例えば 18000 円であれば, 10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になることがわかる。

(3)　1 年目の入金を始める前における花子さんの預金が 10 万円ではなく, 13 万円の場合を考える。すべての自然数 n に対して, この場合の n 年目の初めの預金は**方針 2** を参考にすると

$$a_n = 13 \times 1.01^{n-1} + 100(1.01^n - 1)p$$

となるので, a_n 万円よりも $\underline{\mathbf{3 \times 1.01^{n-1}}\ ⑧_{\text{ソ}}}$ 万円多い。なお, 年利は 1 % であり, 毎年の初めの入金額は p 万円のままである。

第 5 問　三角錐 PABC において, 辺 BC の中点を M とおく。また, $\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PAC}$ とし, この角度を θ とおく。ただし, $0° < \theta < 90°$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は, 点 M が辺 BC の中点であることより

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\mathbf{1}_{\text{ア}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{イ}}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\mathbf{1}_{\text{ウ}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{エ}}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せる。また, 内積の定義より

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \underline{\boldsymbol{\cos\theta}\ ①_{\text{オ}}} \cdots\cdots ①$$

である。

(2) $\theta = 45°$ とし, さらに

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = 3\sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right| = 3,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right| = 3$$

が成り立つ場合を考える。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 45° = 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\mathbf{9}_{\text{カ}}}$$

である。さらに, 直線 AM 上の点 D が $\angle\mathrm{APD} = 90°$ を満たしているとする。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - k\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{k}}\,2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DP}} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{k}}\,2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 - \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= 18 - \frac{9}{2}k - \frac{9}{2}k = 18 - 9k = 0\end{aligned}$$

より, $k = 2$ である。

したがって, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \underline{\mathbf{2}_{\text{キ}}}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ である。

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

で定まる点を とおく。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直である三角錐 PABC はどのようなものかについて考えよう。例えば (2) の場合では, 点 Q は点 D と一致し, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は垂直である。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき, を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表して考えると $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\end{aligned}$$

より, $\underline{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}\ ⓪_{\text{ク}}}$ が成り立つ。さらに ① に注意すると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2$$

であるから, $\underline{\boldsymbol{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|}\ ③_{\text{ケ}}}$ が成り立つことがわかる。

したがって, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であれば, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ が成り立つ。逆に, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ が成り立てば, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は垂直である。

(ii) k を正の実数とし

$$k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

が成り立つとする。このとき, $k\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta$ より $\boldsymbol{k\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}\ ⓪_{\text{コ}}$ が成り立つ。

また, 点 P から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を B$'$ とし, 同様に点 C から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を C$'$ とする。

(i) より $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直のとき,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$$

が成り立ち, これに $k\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$ を代入すると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta+k\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$$

すなわち

$$(1+k)\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$$

三角比の定義から

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}=\cos\theta$$

より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\right|$$

となるので,

$$(1+k)\left|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$$

よって, 点 B$'$ は線分 AP を $1:k$ に内分する。
同様にして, 点 C$'$ が線分 AP を $k:1$ に内分することもわかる。

したがって, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは, <u>**B$'$ と C$'$ が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点** ④$_{\text{サ}}$</u> であることと同値である。特に, $k=1$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直だとすると, 点 B$'$, C$'$ はともに線分 AP の中点になる。これは △PAB と △PAC が二等辺三角形であることと同値である。したがって, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは, <u>△PAB **と** △PAC **がそれぞれ BP = BA, CP = CA を満たす二等辺三角形** ②$_{\text{シ}}$</u> であることと同値である。