

令和6年度大学入学共通テスト 数学 I・数学 A 解答解説

GTS

実施日：2024/1/14 作成日：2024/1/15

第1問

[1] $3.5^2 = 12.25$ より

$$3.5 < \sqrt{13} < 4$$

であるから

$$n < 2\sqrt{13} < n+1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす整数 n は 7ア である。実数 a, b を

$$a = 2\sqrt{13} - 7 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$b = \frac{1}{a} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

で定める。このとき

$$b = \frac{1}{2\sqrt{13} - 7} = \frac{2\sqrt{13} + 7}{(2\sqrt{13} - 7)(2\sqrt{13} + 7)} = \frac{\underline{7イ} + 2\sqrt{13}}{\underline{3ウ}} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

である。また

$$a^2 - 9b^2 = (a + 3b)(a - 3b) = 4\sqrt{13} \times (-14) = \underline{-56エオカ}$$

である。

① から、両方を2で割って

$$\frac{7}{2} < \sqrt{13} < \frac{7+1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

が成り立つ。

① と ④ から

$$\frac{m}{3} < b < \frac{m+1}{3}$$

を満たす整数 m は

$$\frac{m}{3} < \frac{7 + 2\sqrt{13}}{3} < \frac{m+1}{3}$$

と

$$14 < 7 + 2\sqrt{13} < 15$$

より $m = \underline{14キク}$ となる。よって、③ から

$$\frac{3}{m+1} < a < \frac{3}{m} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は 3ケ であり、② と ⑥ より

$$\frac{3}{15} < 2\sqrt{13} - 7 < \frac{3}{14}$$

より

$$\frac{36}{10} = 3.6 < \sqrt{13} < \frac{101}{28} \approx 3.607\dots$$

となるから、 $\sqrt{13}$ の小数第1位の数字は 6コ、小数第2位の数字は 0サ であることがわかる。

[2] (細かい問題文は省略)

道路標識の 7% という表示は、この坂をのぼったとき、100m の水平距離に対して 7 m の割合で高くなることを示している。 n を 1 以上 9 以下の整数とすると、坂の傾斜角 $\angle DCP$ の大きさに対して

$$\tan \angle DCP = \frac{7}{100} = 0.07$$

より

$$\tan 4^\circ = 0.0699 < \tan \angle DCP < \tan 5^\circ = 0.0875$$

であるから

$$n^\circ < \angle DCP < n^\circ + 1^\circ$$

を満たす n の値は 4 である。

以下では、 $\angle DCP$ の大きさは、ちょうど 4° であるとする。

ある日、電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき、影の長さを調べたところ $BC = 7\text{m}$ 、 $CD = 4\text{m}$ であり、太陽高度は $\angle APB = 45^\circ$ であった。点 D から直線 AB に垂直な線を引き、直線 AB との交点を E とするとき

$$BE = CD \times \sin \angle DCP = \underline{4} \times \underline{0.07}$$

であり

$$DE = (BC + CD \times \cos \angle DCP) = (\underline{7} + \underline{4} \times \underline{0.99})$$

である。よって、電柱の高さを求めると

$$\begin{aligned} AB &= AE + BE \\ &= DE \times \tan 45^\circ + BE \\ &= 4 \sin \angle DCP + (7 + 4 \cos \angle DCP) \\ &= 0.2792 + 7 + 3.9904 \\ &= 11.2696 \end{aligned}$$

より、小数第 2 位で四捨五入すると 11.3 であることがわかる。

別の日、電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽高度は $\angle APB = 42^\circ$ であった。電柱の高さが分かったので、前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。電柱の影について、坂にある部分の長さは

$$\begin{aligned} AB &= AE + BE \\ &= DE \times \tan 42^\circ + BE \\ &= (BC + CD \times \cos \angle DCP) \times \tan 42^\circ + CD \times \sin \angle DCP \\ &= CD (\cos \angle DCP \times \tan 42^\circ + \sin \angle DCP) + BC \times \tan 42^\circ \end{aligned}$$

を CD について解くと

$$CD = \frac{AB - BC \times \tan 42^\circ}{\sin \angle DCP + \cos \angle DCP \times \tan 42^\circ} = \frac{AB - \underline{7} \times \underline{0.90}}{\underline{0.07} + \underline{0.99} \times \underline{0.90}}$$

である。 $AB=11.3\text{m}$ として、これを計算することにより、この日の電柱の影について、坂にある部分の長さは、前回調べた 4m より約 1.2m だけ長いことが分かる。

第 2 問

[1] 太座標平面上に 4 点 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(4, 6)$, $C(0, 6)$ を頂点とする台形 $OABC$ がある。また、この座標平面上で、点 P , Q は次の規則に従って移動する。

規則

- P は、 O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し、 A に到達した時点で移動を終了する。
- Q は、 C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し、 O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして、 C に到達した時点で移動を終了する。ただし、 Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する。
- P , Q は同時刻に移動を開始する。

この規則に従って P , Q が移動するとき、 P , Q はそれぞれ A , C に同時刻に到達し、移動を終了する。

以下において、 P , Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**、移動を終了する時刻を**終了時刻**とする。

(1) **開始時刻**から 1 秒後の $\triangle PBQ$ の面積は

$$\triangle PBQ = \text{台形 } OPBC - (\triangle OPQ + \triangle BCQ) = (1 + 4) \times 6 \div 2 - (1 \times 4 \div 2 + 4 \times 2 \div 2) = 15 - 6 = 9$$

より 9_ア である。

(2) **開始時刻**から 3 秒間の $\triangle PBQ$ の面積について、 x 秒後を考えると

$$\begin{aligned} \triangle PBQ &= \text{台形 } OPBC - (\triangle OPQ + \triangle BCQ) = (x + 4) \times 6 \div 2 - (6 - 2x) \times x \div 2 - 4 \times 2x \div 2 \\ &= x^2 - 4x + 12 \\ &= (x - 2)^2 + 8 \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq x \leq 3$ で、 $x = 2$ のとき、最小値 8_イ、 $x = 0$ のとき、最大値 12_{ウエ} である。

(3) **開始時刻**から**終了時刻**での $\triangle PBQ$ の面積について、 $3 \leq x \leq 6$ のとき

$$\begin{aligned} \triangle PBQ &= \text{台形 } OPBC - (\triangle OPQ + \triangle BCQ) = (x + 4) \times 6 \div 2 - (2x - 6) \times x \div 2 - 4 \times (12 - 2x) \div 2 \\ &= -x^2 + 10x - 12 \\ &= -(x - 5)^2 + 13 \end{aligned}$$

より、 $x = 3$ で最小値 9、 $x = 5$ で最大値 13 である。

これと、(2) の解答を合わせて、最小値は 8_オ であり、最大値は 13_{カキ} である。

(4) **開始時刻**から**終了時刻**までの $\triangle PBQ$ の面積について、面積が 10 以下となる時間を考える。

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 12 \leq 10 & (0 \leq x \leq 3) \\ -x^2 + 10x - 12 \leq 10 & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

を解くと、上式の解は

$$2 - \sqrt{2} \leq x \leq 3$$

下式の解は

$$3 \leq x \leq 5 - \sqrt{3}$$

となる。したがって、求める時間は

$$5 - \sqrt{3} - (2 - \sqrt{2})$$

より $\left(\underline{3_ク} - \sqrt{\underline{3_{ケコ 秒間である。}$

[2] (問題文は省略)

(1) (問題文は省略)

(i) (問題文や図は省略)

図 1 から A の最頻値は階級 510 以上 540 未満 $\textcircled{8}$ の階級値である。また、図 2 から B の中央値が含まれる階級は、25 番目の値がある階級であるから、450 以上 480 未満 $\textcircled{6}$ である。

(ii) (問題文や図は省略)

図 3 から次のことが読み取れる。ただし、A, B それぞれにおける、速いほうから 13 番目の選手は、一人ずつとする。

- 13 番目の選手は第 1 四分位数をとる選手であるから、B の速い方から 13 番目の選手のベストタイム約 435 秒, A の速いほうから 13 番目の選手のベストタイム約 480 秒より、およそ 45 $\textcircled{4}$ 秒速い。
- A の四分位範囲約 50 秒から B の四分位範囲約 50 秒を引いた差の絶対値は 0 以上 20 未満 $\textcircled{0}$ である。

(iii) 太郎さんは、A のある選手と B のある選手のベストタイムのひかくにおいて、その二人の選手のベストタイムが速いか遅いかとは別の観点でも考えるために、次の式を満たす z の値を用いて判断することにした。

式

$$(\text{あるデータのある選手のベストタイム}) = (\text{そのデータの平均値}) + z \times (\text{そのデータの標準偏差})$$

二人の選手それぞれのベストタイムに対する z の値を比較し、その値の小さい選手の方が優れていると判断する。

表 1 は、それぞれにおける、速いほうから 1 番目の選手 (以下、1 位の選手) のベストタイムと、データの平均値と標準偏差をまとめたものである。

表 1: 1 位の選手のベストタイム, 平均値, 標準偏差

データ	1 位の選手のベストタイム	平均値	標準偏差
A	376	504	40
B	296	454	45

式と表 1 を用いると、B の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は

$$296 = 454 + 45z$$

を解いて、

$$z = -\underline{3.51} \text{タチ}$$

である。このことから、B の 1 位の選手のベストタイムは、平均値より標準偏差のおよそ 3.51 倍だけ小さいことがわかる。

A の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は

$$376 = 504 + 40z$$

を解いて、

$$z = -3.1$$

となるので、ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く、 z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。したがって、A, B それぞれにおける、1 位の選手についての記述として、正しいものは、 $\textcircled{1}$ である。

(2) (問題文と図は省略)

(a) について、マラソンのベストタイムの速いほうから 3 番目までの選手の 10000 m のベストタイムは、3 選手とも 1670 秒未満であるから、正しい。

(b) について、マラソンと 10000 m の間の相関は、5000 m と 10000 m の間の相関より強くない (離れている) ので、誤っている。

したがって、(a), (b) の正誤の組合せとして正しいものは (a) 正 (b) 誤 であるから $\textcircled{1}$ である。

第3問 箱の中にカードが2枚以上入っており、それぞれのカードにはアルファベットが1文字だけ書かれている。この箱の中からカードを1枚取り出し、書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返す。

(1) 箱の中に \boxed{A} , \boxed{B} のカードが1枚ずつ全部で2枚入っている場合を考える。

以下では、2以上の自然数 n に対し、 n 回の試行で A, B がそろっているとは、 n 回の試行で \boxed{A} , \boxed{B} のそれぞれが少なくとも1回は取り出されることを意味する。

(i) 2回の試行で A, B がそろっている確率は、2枚ともに同じアルファベット、または2枚が異なるアルファベットの場合がそれぞれ2通りずつあり、2枚が異なるアルファベットの確率であるから、 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ である。

(ii) 3回の試行で A, B がそろっている確率を求める。

例えば、3回の試行のうち \boxed{A} を1回、 \boxed{B} を2回取り出す取り出し方は3通りあり、それらをすべて挙げると次のようになる。このように考えることにより、3回の試行で A, B がそろっている取り出し方は A と B

1回目	2回目	3回目
\boxed{A}	\boxed{B}	\boxed{B}
\boxed{B}	\boxed{A}	\boxed{B}
\boxed{B}	\boxed{B}	\boxed{A}

を入れ替えた場合も考えて $\underline{6}$ 通りあることがわかる。よって、3回の試行で A, B がそろっている確率は $\frac{6}{2^3}$ である。

(iii) 4回の試行で A, B がそろっている取り出し方は、すべての場合から A だけ、B だけの場合を除いて、 $2^4 - 2 = \underline{14}$ 通りであることがわかる。よって、4回の試行で A, B がそろっている確率は $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$ である。

(2) 箱の中に \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} のカードが1枚ずつ全部で3枚入っている場合を考える。

以下では、3以上の自然数 n に対し、 n 回の試行で A, B, C がそろっているとは、 n 回の試行で \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} のそれぞれが少なくとも1回は取り出されることを意味する。

(i) 3回の試行で A, B, C がそろって取り出し方は、3回のうち A, B, C が少なくとも1回は出る場合で、その並び方は A, B, C の並び方と等しいから、 $3! = \underline{6}$ 通りある。よって、3回目の試行で初めて A, B, C がそろって確率は $\frac{6}{3^3}$ である。

(ii) 4回の試行で初めて A, B, C がそろって確率を求める。

4回目の試行で初めて A, B, C がそろって取り出し方は、(1) の (ii) を振り返ることにより、 3×6 通りあることがわかる。よって、4回の試行で初めて A, B, C がそろって確率は $\frac{3 \times 6}{3^4} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$ である。

(iii) 5回の試行で初めて A, B, C がそろって取り出し方は、(2) と同様に考えて $3 \times 14 = \underline{42}$ 通りである。よって、5回の試行で初めて A, B, C がそろって確率は $\frac{42}{3^5}$ である。

(3) 箱の中に \boxed{A} , \boxed{B} , \boxed{C} , \boxed{D} のカードが1枚ずつ全部で4枚入っている場合を考える。(問題文を一部省略)

6回の試行のうち3回目の試行で初めて A, B, C がそろって取り出し方が6通りであることに注意すると、「6回の試行のうち3回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい、かつ6回目の試行で初めて \boxed{D} が取り出される」取り出し方は、4回目、5回目は A, B, C のどれかを取り出すので、 $6 \times 3^2 = \underline{54}$ 通りであることがわかる。

同じように考えると、「6回の試行のうち4回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい、かつ6回目の試行で初めて \boxed{D} が取り出される」取り出し方は、5回目は A, B, C のどれかを取り出すので、 $3 \times 6 \times 3 = \underline{54}$ 通りあることもわかる。

以上のように考えることにより、6回目の試行で初めて A, B, C, D がそろって確率は、6回の試行のうち5回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい、かつ6回目の試行で初めて \boxed{D} が取り出される」取り出し方が $3 \times 14 = 52$ 通りであることから

$$\frac{(54 + 54 + 3 \times 14) \times 4}{4^6} = \frac{3(18 + 18 + 14) \times 4}{4^6} = \frac{3 \times 50}{4^5} \frac{3 \times 25}{2^9} = \frac{75}{512}$$

であることがわかる。

第 4 問 (問題文や図を一部省略)

- (1) T6 は、スタートしてから 10 進数で 6 秒後に 10, 36 秒後に 100 と表示されるから、40 秒後に 104_{アイウ} と表示される。

T4 は、スタートしてから 2 進数で 100₍₂₎ 秒後に 10 進数で 10, 2 進数で 10000₍₂₎ 秒後に 10 進数で 100 と表示されるから、2 進数で 10011₍₂₎ 秒後に 103_{エオカ} と表示される。

- (2) T4 をスタートさせた後、初めて表示が 000 に戻るのは、スタートしてから 10 進数で $4^3 = 64$ _{キク} 秒後であり、その後も 36 秒ごとに表示が 000 に戻る。

同様の考察を T6 に対しても行うことにより、T4 と T6 を同時にスタートさせた後、初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは、 $4^3 = 64$ と $6^3 = 216$ の最小公倍数を求めれば良いから、1728_{ケコサシ} 秒後であることがわかる。

- (3) 0 以上の整数 l に対して、T4 をスタートさせた l 秒後に T4 が 012 と表示されることと

$$l \text{ を } 64\text{_{スセ} で割った余りが } 6\text{_ソ であること}$$

は同値である。ただし、64 と 6 は 10 進法で表されているものとする。

T3 についても同様の考察を行うと、0 以上の整数 l に対して、T3 をスタートさせた l 秒後に T3 が 012 と表示されることと

$$l \text{ を } 27 \text{ で割った余りが } 5 \text{ であること}$$

は同値であるから、次のことが分かる。

T3 と T4 を同時にスタートさせてから、初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を m 秒とする。ただし、 m は 10 進法の数とする。このとき、

$$\begin{cases} m = 64x + 6 \\ m = 27y + 5 \end{cases}$$

を満たす整数 x, y が存在する。

$$64x + 6 = 27y + 5$$

より、

$$-64x + 27y = 1$$

が成り立つ。これを満たす最小の x, y の組合せは $x = 8, y = 19$ のときであるから

$$m = 64 \times 8 + 6 = 518$$

より、求める m は 518_{タチツ} と表される。

また、T4 と T6 に対しても、T4 と T6 を同時にスタートさせてから、初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を n 秒と仮定すると、整数 x, y に対して以下の式が成り立つ。

$$\begin{cases} n = 64x + 6 \\ n = 216y + 8 \end{cases}$$

この式より、 $64x - 216y = 2$ で両辺を 2 で割って

$$32x - 108y = 1$$

である。しかし、この式の左辺は偶数、右辺は奇数であるから、この式は成り立たない。

したがって、T4 と T6 の表示に関する記述として、T4 と T6 を同時にスタートさせてから、両方が同時に 012 と表示されることはない。ので、正しいものは ③_テ である。

第 5 問 (問題文や図は省略)

- (1) $\triangle AQD$ と直線 CE に着目すると、メネラウスの定理より

$$\frac{QR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{AC}{CQ} \stackrel{\textcircled{0}}{\text{テ}} = 1$$

$$\frac{QR}{RD} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 1$$

が成り立つので,

$$QR : RD = \underline{1イ} : \underline{4ウ}$$

となる。また, $\triangle AQD$ と直線 BE に着目すると, メネラウスの定理より

$$\begin{aligned} \frac{QB}{BD} \cdot \frac{DT}{TA} \cdot \frac{AP}{PQ} &= 1 \\ \frac{QB}{BD} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$QB : BD = \underline{3エ} : \underline{8オ}$$

となる。したがって,

$$BQ : QR : RD = 3 : 1 : 4$$

となることがわかる。

(2) 5 点 P, Q, R, S, T が同一円周上にあるとし, $AC=8$ であるとする。

(i) 5 点 A, P, Q, S, T に着目すると, P, Q, S, T が同一円周上にあり, $AT : AS = 1 : 2$, 方べきの定理より

$$\begin{aligned} AP \times AQ &= AT \times AS \\ 2 \times 5 &= AT \cdot 2AT \\ 2AT^2 &= 5 \\ AT &= \sqrt{\underline{5カ}} \end{aligned}$$

となる。さらに, 5 点 D, Q, R, S, T に着目すると $DR=4\sqrt{3}$ となることがわかる。

(ii) 3 点 A, B, C を通る円と点 D との位置関係を, 次の構想に基づいて調べよう。

構想

線分 AC と BD の交点 Q に着目し, $AQ \cdot CQ$ と $BQ \cdot DQ$ の大小を比べる。

まず, $AQ \cdot CQ = 5 \cdot 3 = 15$ かつ $BQ \cdot DQ = 3\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = \underline{45キク}$ であるから

$$AQ \cdot CQ < \underline{①ク} BQ \cdot DQ \quad \dots\dots\dots ①$$

が成り立つ。また, 3 点 A, B, C を通る円と直線 BD との交点のうち, B と異なる点を X とすると, 方べきの定理より

$$AQ \cdot CQ = \underline{①ク} BQ \cdot XQ \quad \dots\dots\dots ②$$

が成り立つ。① と ② の左辺は同じなので, ① と ② の右辺を比べることにより, $XQ < \underline{①ク} DQ$ が得られる。

したがって, 点 D は 3 点 A, B, C を通る円の 外部 ②ク にある。

(iii) 3 点 C, D, E を通る円と 2 点 A, B との位置関係について調べよう。

この星形の図形において, さらに $CR = RS = SE = 3$ となることがわかる。したがって,

$$\begin{aligned} AS \cdot SD &= 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 30 \\ CS \cdot SE &= 6 \cdot 3 = 18 \end{aligned}$$

より, 点 A は 3 点 C, D, E を通る円の 外部 ②ク にある。

また,

$$\begin{aligned} BR \cdot RD &= 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48 \\ CR \cdot RE &= 3 \cdot 6 = 18 \end{aligned}$$

より, 点 B は 3 点 C, D, E を通る円の 外部 ②ク にある。