令和５年度大学入学共通テスト　数学 II・数学 B 解答解説

GTS

実施日：2024/1/14　作成日：2024/1/30

第 1 問

〔1〕

(1)　$k>0,\ k\neq 1$ のする。関数 $y=\log_k x$ と $y=\log_2 kx$ のグラフについて考えよう。

(i) $y=\log_3 x$ のグラフは, $y=\log_3 27=\log_3 3^3=3$ より, 点 $\left(27,\underline{\mathbf{3}_{\text{ア}}}\right)$ を通る。また, $y=\log_2\dfrac{x}{5}$ のグラフは, $1=\log_2\dfrac{x}{5}$ より $\dfrac{x}{5}=2$ となるから, 点 $\left(\underline{\mathbf{10}_{\text{イウ}}},\ 1\right)$ を通る。

(ii) $0=\log_k 1$ であるから $y=\log_k x$ のグラフは, k の値によらず定点 $\left(\underline{\mathbf{1}_{\text{エ}}},\underline{\mathbf{0}_{\text{オ}}}\right)$ を通る。

(iii) $k=2,\ 3,\ 4$ のとき

$y=\log_k x$ のグラフの概形は, 図 1 より, $\underline{0_{\text{カ}}}$

$y=\log_2 kx$ のグラフの概形は, 図 2 より, $\underline{5_{\text{キ}}}$

図 1: $y=\log_k x$ のグラフ

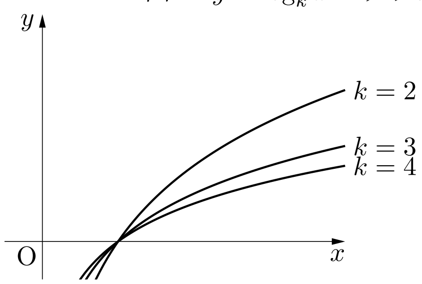
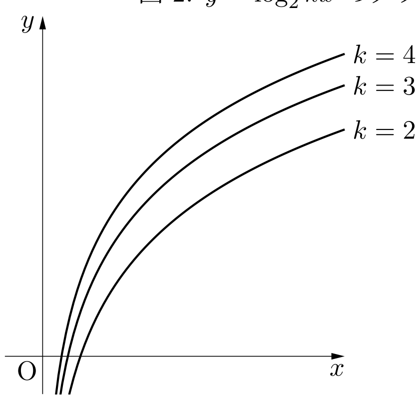
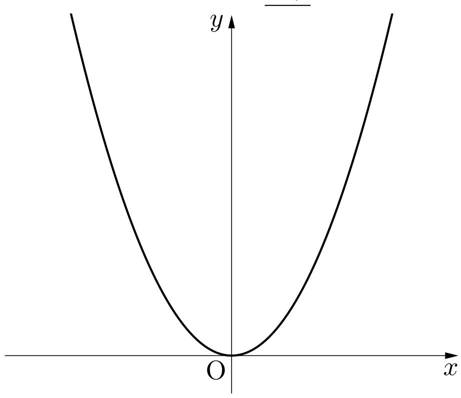


図 2: $y=\log_2 kx$ のグラフ



(2)　$x>0,\ x\neq 1,\ y>0$ とする。$\log_x y$ について考えよう。

(i) 座標平面において, 方程式 $\log_x y=2$ の表す図形を図示すると, $\log_x y=\log_x x^2$ より $y=x^2(x>0,\ x\neq 1,\ y>0)$ となるから, $\underline{2_{\text{ク}}}$ の $x>0,\ x\neq 1,\ y>0$ の部分となる。

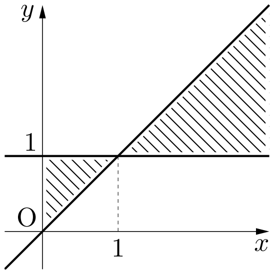


(ii) 座標平面において, 不等式 $0<\log_x y<1$ の表す図形を図示すると, $\log_x 1<\log_x y<\log_x x$ より

$x>1$ のとき, $1<y<x$

$0<x<1$ のとき, $x<y<1$

となるから, $\underline{②_{\text{ケ}}}$ の斜線部分となる。ただし, 境界（境界線）は含まない。



〔２〕$S(x)$ を x の 2 次式とする。x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$, 余りを $U(x)$ とする。ただし, $S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5,\ S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。
方程式 $S(x) = 0$ の解は $x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 7} = \underline{\mathbf{-2}_{\text{コサ}}} \pm \sqrt{\underline{\mathbf{3}_{\text{シ}}}}\,i$ である。

また,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x \quad -1 \\
\hline
x^2+4x+7 & 2x^3+7x^2+10x+5 \\
 & 2x^3+8x^2+14x \\
\hline
 & \quad -x^2 \ -4x+5 \\
 & \quad -x^2 \ -4x-7 \\
\hline
 & \qquad\qquad 12
\end{array}
$$

より, $T(x) = \underline{\mathbf{2}_{\text{ス}}}x - \underline{\mathbf{1}_{\text{セ}}},\ U(x) = \underline{\mathbf{12}_{\text{ソタ}}}$ である。

(2) 方程式 $S(x) = 0$ は異なる二つの解 $\alpha,\ \beta$ をもつとする。このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。
仮定から, 定数 k を用いて $U(x) = k$ とおける。このとき, $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから, $P(\alpha) = P(\beta) = k$ となることが導かれる $\underline{③_{\text{チ}}}$ ($\because$ 剰余の定理)。したがって, 余りが定数になるとき, $\underline{\boldsymbol{P(\alpha) = P(\beta)}\ ①_{\text{ツ}}}$ が成り立つ。

(ii) 逆に $P(\alpha) = P(\beta)$ が成り立つとき, 余りが定数になるかを調べよう。
$S(x)$ が 2 次式であるから, $m,\ n$ を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。$P(x)$ を $S(x),\ T(x),\ m,\ n$ を用いて表すと, $P(x) = \underline{\boldsymbol{S(x)T(x) + mx + n}\ ①_{\text{テ}}}$ となる。この等式の x に $\alpha,\ \beta$ をそれぞれ代入すると $\underline{\boldsymbol{P(\alpha) = m\alpha + n}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{P(\beta) = m\beta + n}\ ①_{\text{ト}}}$ となるので, $P(\alpha) = P(\beta)$ と $\alpha \neq \beta$ より $\underline{\boldsymbol{m = 0}\ ③_{\text{ナ}}}$ となる。以上から余りが定数になることが分かる。

(i), (ii) の考察から, 方程式 $S(x) = 0$ が異なる二つの解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき, $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $P(\alpha) = P(\beta)$ であることは同値である。

(3) p を定数とし, $P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x,\ S(x) = x^2 - x - 2$ の場合を考える。$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき, 商を $T(x)$, 余りを q とする。このとき, $P(x) = S(x)T(x) + q$ となるので, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ より, $S(2) = S(-1) = 0$ となって, $P(2) = P(-1) = q$ である。
よって, $P(2) = -4p - 10,\ P(-1) = -p + 8$ より, $-4p - 10 = -p + 8$
したがって, $p = \underline{\mathbf{-6}_{\text{ニヌ}}}$ となり, その余りは $q = -p + 8 = \underline{\mathbf{14}_{\text{ネノ}}}$ となる。

第 2 問 m を $m > 1$ を満たす定数とし, $f(x) = 3(x-1)(x-m)$ とする。また, $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ とする。関数 $y = f(x)$ と $y = S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1) $m = 2$ のとき, すなわち, $f(x) = 3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i) $f(x) = 3(x-1)(x-2) = 3x^2 - 9x + 6$ より, $f'(x) = 6x - 9 = 3(2x-3)$ であるから $f'(x) = 0$ となる x の値は $x = \underline{\dfrac{\mathbf{3}_{\text{ア}}}{\mathbf{2}_{\text{イ}}}}$ である。

(ii)　$S(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x \left(3t^2 - \underline{\mathbf{9}_{\text{ウ}}}\,t + \underline{\mathbf{6}_{\text{エ}}}\right) dt \\ &= x^3 - \frac{\mathbf{9}_{\text{オ}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{カ}}}}x^2 + \underline{\mathbf{6}_{\text{キ}}}\,x \end{aligned}$$

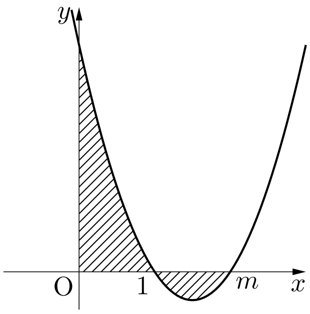
であるから, $S'(x) = f(x) = 3(x-1)(x-2)$ より

$x = \underline{\mathbf{1}_{\text{ク}}}$ のとき, $S(x)$ は極大値 $S(1) = \dfrac{\mathbf{5}_{\text{ケ}}}{\underline{\mathbf{2}_{\text{コ}}}}$ をとり

$x = \underline{\mathbf{2}_{\text{サ}}}$ のとき, $S(x)$ は極小値 $S(2) = \underline{\mathbf{2}_{\text{シ}}}$ をとることがわかる。

(iii)　$f(3)$ は, $S'(3) = f(3)$ より, 関数 $y = S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾き $\underline{③_{\text{ス}}}$ と一致する。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で, 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1, $1 \leqq x \leqq m$ の範囲で, 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき, 下の図から



$S_1 = \underline{\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{f(x)dx}\ ⓪_{\text{セ}}}$, $S_2 = \underline{\displaystyle\int_1^m \boldsymbol{\{-f(x)\}dx}\ ⑤_{\text{ソ}}}$ である。

$S_1 = S_2$ となるのは $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx + \int_1^m f(x)dx = \underline{\int_0^m \boldsymbol{f(x)dx}\ ①_{\text{タ}}} = 0$ のときであるから, $S_1 = S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は, $\displaystyle\int_0^m f(x)dx = S(m) = 0,\ 0 < x < m$ のとき $f(x) > 0$ と図 3 より, $\underline{①_{\text{チ}}}$ である。また, $S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は, $\displaystyle\int_0^m f(x)dx = S(m) > 0,\ 0 < x < m$ のとき $f(x) > 0$ と図 4 より, $\underline{②_{\text{ツ}}}$ である。

図 3: $S_1 = S_2$ のとき

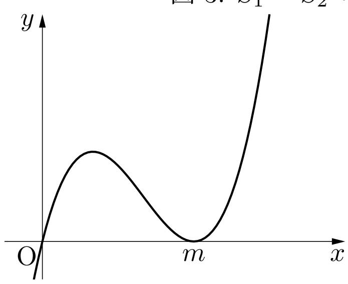
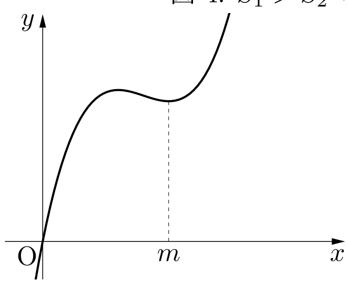


図 4: $S_1 > S_2$ のとき



(3)　関数 $y = f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y = S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

関数 $y = f(x)$ のグラフは, $x = 1, x = m$ で x 軸と接するから, 直線 $x = \underline{\dfrac{\boldsymbol{m+1}}{\mathbf{2}}\ ③_{\text{テ}}}$ に関して対称であるから, すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^1 f(x) = \int_m^{\boldsymbol{m+p}\ ④_{\text{ト}}} f(x)dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

が成り立ち, $M = \dfrac{m+1}{2}$ とおくと $0 < q \leqq M - 1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^M \{-f(x)\}dx = \int_M^{\boldsymbol{M+q}\ ②_{\text{ナ}}} \{-f(x)\}dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

が成り立つことが分かる。すべての実数 $\alpha,\ \beta$ に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = S(\beta) - S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば, ① と ② はそれぞれ

$$S(1) - S(1-p) = S(m+p) - S(m)$$
$$-S(M) - \{-S(M-q)\} = -S(M+q) - \{-S(M)\}$$

より

$$S(1-p) + S(m+p) = \underline{\boldsymbol{S(1)+S(m)}\ ⓪_{ニ}}$$
$$2S(M) = \underline{\boldsymbol{S(M-q)+S(M+q)}\ ④_{ヌ}}$$

となる。

以上から, すべての正の実数 p に対して, 2 点 $(1-p,\ S(1-p)), (m+p,\ S(m+p))$ を結ぶ線分の中点について,

$$\frac{(1-p)+(m+p)}{2} = \frac{1+m}{2} = M$$

また,

$$\frac{S(1-p)+S(m+p)}{2} = \frac{S(1)+S(m)}{2} = S(M)$$

となるから, この中点は点 $(M, S(M))$ になる。よって, 中点は p の値によらず一つに定まり, 関数 $y = S(x)$ のグラフ上にある。$\underline{②_{ネ}}$

第 3 問　問題文を一部省略。ここでの**晴れ**の定義については, 気象庁の天気概況の「快晴」または「晴」とする。

(1)　あ太郎さんは, 自分が住んでいる地域において, 日曜日に**晴れ**となる確率を考えている。
晴れの場合は 1, **晴れ**以外の場合は 0 の値をとる確率変数を X と定義する。また, $X=1$ である確率を p とすると, その確率分布表は表 1 のようになる。この確率変数 X の平均（期待値）を m とすると

表 1:

X	0	1	計
確率	$1-p$	p	1

$$m = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = \underline{\boldsymbol{p}\ ⓪_{ア}}$$

となる。

太郎さんは, ある期間における連続した n 週の日曜日の天気を, 表 1 の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本とみなし, それらの X の確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ で表すことにした。そして, その標本平均 $\overline{X}$ を利用して, 母平均 m を推定しようと考えた。実際に $n = 300$ として**晴れ**の日数を調べたところ, 表 2 のようになった。

表 2:

天気	日数
晴れ	75
晴れ以外	225
計	300

母標準偏差を σ とすると, $n = 300$ は十分に大きいので, 標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \underline{\boldsymbol{\frac{\sigma^2}{n}}\ ③_{イ}}\right)$ に従う。

一般に, 母標準偏差 σ がわからないとき, 標本の大きさ n が大きければ, σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いてもよいことが知られている。S は

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{n}\{(X_1-\overline{X})^2 + (X_2-\overline{X})^2 + \cdots + (X_n-\overline{X})^2\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n}({X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2) - \underline{\boldsymbol{(\overline{X})^2}\ ①_{ウ}}} \end{aligned}$$

と計算できる。ここで，$X_1{}^2 = X_1$，$X_2{}^2 = X_2$，$\cdots, X_n{}^2 = X_n$ であることに着目し，右辺を整理すると，$S = \sqrt{\underline{\boldsymbol{\overline{X}(1-\overline{X})}\ ①_{チ}}}$ と表されることがわかる。

よって，表 2 より，大きさ $n = 300$ の標本から求められる母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は，標本比率 $R = \dfrac{75}{300} = 0.25$ より

$$
\begin{aligned}
0.25 - 1.96\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{300}} \leqq m \leqq 0.25 + 1.96\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{300}} \\
0.25 - 1.96\sqrt{\frac{0.25\cdot 0.75}{300}} \leqq m \leqq 0.25 + 1.96\sqrt{\frac{0.25\cdot 0.75}{300}} \\
0.25 - 1.96\sqrt{\frac{0.25\cdot 0.25}{100}} \leqq m \leqq 0.25 + 1.96\sqrt{\frac{0.25\cdot 0.25}{100}} \\
0.25 - 1.96\cdot\frac{0.25}{10} \leqq m \leqq 0.25 + 1.96\cdot\frac{0.25}{10} \\
0.25 - 0.049 \leqq m \leqq 0.25 + 0.49 \\
0.201 \leqq m \leqq 0.299
\end{aligned}
$$

となるので，$\underline{\boldsymbol{0.201 \leqq m \leqq 0.299}\ ⓪_{オ}}$

(2)　問題文一部省略。

ここで，U_k の期待値を求めてみよう。(1) における p の値を $p = \dfrac{1}{4}$ とする。

晴れを○，**晴れ**以外を×として考える。

$k = 4$ のとき，U_4 の期待値は，「ちょうど 3 週続けて日曜日の天気が**晴れ**になること」の場合が (○, ○, ○, ×), (×, ○, ○, ○) の 2 通りあることより

$$E(U_4) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{\boldsymbol{3}_{カ}}{128}$$

となる。$k = 5$ のとき，U_5 の期待値は，「ちょうど 3 週続けて日曜日の天気が**晴れ**になること」の場合が，(○, ○, ○, ×, ×) のように ○ が 3 個，× が 2 個の場合が 3 通り，(○, ×, ○, ○, ○) のように ○が 4 個，× が 1 個の場合が 2 通りあることより

$$E(U_5) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{\boldsymbol{33}_{キク}}{1024}$$

となる。

4 以上の k について，k と $E(U_k)$ の関係を詳しく調べると，座標平面上の点 $(4,\ E(U_4))$, $(5,\ E(U_5))$, $\cdots$, $(300,\ E(U_{300}))$ は一つの直線上にあることがわかる。この事実によって，2 点 $\left(4,\ \dfrac{3}{128}\right)$，$\left(5,\ \dfrac{33}{1024}\right)$ を通る直線を考えると

$$y = \frac{9}{1024}x - \frac{12}{1024}$$

となるから，$k = 300$ のとき

$$E(U_{300}) = \frac{9}{1024}\cdot 300 - \frac{12}{1024} = \frac{2688}{1024} = \frac{\boldsymbol{21}_{ケコ}}{\underline{\boldsymbol{8}_{サ}}}$$

第 4 問

(1)　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_{n+1} - a_n = 14\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

を満たすとする。

$a_1 = 10$ のとき，$a_2 = a_1 + 14 = \underline{\boldsymbol{24}_{アイ}}$，$a_3 = a_2 + 14 = \underline{\boldsymbol{38}_{ウエ}}$ である。

数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項 a_1 を用いて，漸化式より公差 14 の等差数列であるとわかるので

$$a_n = a_1 + \underline{\boldsymbol{14}_{オカ}}(n-1)$$

と表すことができる。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が

$$2b_{n+1}-b_n+3=0 \ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

を満たすとする。

数列 $\{b_n\}$ の一般項は, 初項 b_1 を用いて

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n-\frac{3}{2} \\ b_{n+1}+3 &= \frac{1}{2}(b_n+3) \end{aligned}$$

より,

$$b_n+3=(b_1+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

すなわち

$$b_n=\Big(b_1+\underline{\mathbf{3}_{キ}}\Big)\left(\frac{\mathbf{1}_{ク}}{\underline{\mathbf{2}_{ケ}}}\right)^{n-1}-\underline{\mathbf{3}_{コ}}$$

と表すことができる。

(3) 太郎さんは

$$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす数列 $\{c_n\}$ について調べることにした。

(i)

- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_1=5$ のとき, $(5+3)(2c_2-5+3)=0$ より, $c_2=\underline{\mathbf{1}_{サ}}$ である。
- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3$ のとき, $(c_2+3)(2(-3)-c_2+3)=0$ すなわち $(c_2+3)^2=0$ より, $c_2=\underline{\mathbf{-3}_{シス}}$, 同様にして $c_1=\underline{\mathbf{-3}_{セソ}}$ である。

(ii) 太郎さんは, 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3$ となる場合について考えている。
$c_3=-3$ のとき, c_4 がどのような値でも

$$(c_3+3)(2c_4-c_3+3)=0$$

が成り立つ。

- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3,\ c_4=5$ のとき,

  $$c_1=-3,\ c_2=-3,\ c_3=-3,\ c_4=5,\ c_5=\underline{\mathbf{1}_{タ}}\ (\because \text{(i)})$$

  である。
- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_3=-3,\ c_4=5$ のとき, $(83+3)(2c_5-83+3)=0$ より

  $$c_1=-3,\ c_2=-3,\ c_3=-3,\ c_4=83,\ c_5=\underline{\mathbf{40}_{チツ}}$$

(iii) 太郎さんは (i) と (ii) から, $c_n=-3$ となることがあるかどうかに着目し, 次の**命題 A** が成り立つのではないかと考えた。

命題 A

> 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし, $c_1\neq-3$ であるとする。このとき, すべての自然数 n について $c_n\neq-3$ である。

命題 A が真であることを証明するには, **命題 A** の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について, 数学的帰納法を用いて, $n=k$ のとき, $c_n\neq-3$ が成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のときも $c_n\neq-3$ が成り立つこと $\underline{③_{テ}}$ を示せばよい。

実際, このようにして**命題 A** が真であることを証明できる。

(iv) 次の (I), (II), (III) は, 数列 $\{c_n\}$ に関する命題である。

(I) $c_1=3$ かつ $c_{100}=-3$ であり, かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

(II) $c_1=-3$ かつ $c_{100}=-3$ であり, かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

(III) $c_1=-3$ かつ $c_{100}=3$ であり, かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

命題 A より, 一度 c_n が -3 以外になると, その後は -3 になることはない。逆に, $c_n=-3$ のとき, c_{n+1} は任意の数を取れる。したがって,(I) は偽, (II), (III) は真であるから, (I), (II), (III) の真偽の組合せとして正しいものは $\underline{④_{ト}}$ である。

第 5 問 点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(2, 7, −1), B(3, 6, 0), C(−8, 10, −3), D(−9, 8, −4) がある。A, B を通る直線を ℓ_1 とし, C, D を通る直線を ℓ_2 とする。

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-2,\ 6-7,\ 0+1)=\left(\underline{\mathbf{1}_{ア}},\ \underline{\mathbf{-1}_{イウ}},\underline{\mathbf{1}_{エ}}\right)$$

であり, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-1,\ -2,\ -1)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-1+2-1=\underline{\mathbf{0}_{オ}}$ である。

(2) 花子さんと太郎さんは, 点 P が ℓ_1 上を動くとき, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となる点 P の位置について考えている。

P が ℓ_1 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 s があり, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\underline{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\ ②_{カ}}$ が成り立つ。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となる s の値を求めれば P の位置が求まる。このことについて, 花子さんと太郎さんが話をしている。

花子：$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2$ が最小となる s の値を求めればよいね。

太郎：$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となるときの直線 OP と ℓ_1 の関係に着目してもよさそうだよ。

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\\ &= s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2s\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\ &= \underline{\mathbf{3}_{キ}}s^2-\underline{\mathbf{12}_{クケ}}s+\underline{\mathbf{54}_{コサ}}\end{aligned}$$

である。

また, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となるとき, 直線 OP と ℓ_1 の関係に着目すると, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\ell_1$ より, $\underline{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0}\ ①_{シ}}$ が成り立つことがわかる。

花子さんの考え方でも, 太郎さんの考え方でも, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=3s^2-12s+54=3(s-2)^2+42$ より, $s=\underline{\mathbf{2}_{ス}}$ のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となることがわかる。(最小値は 42 である。)

別解：$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2+s,\ 7-s,\ -1+s)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2+s-7+s-1+s=3s-6=0$ であるから, $s=2$ のとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ が最小となる。

(3) 点 P が ℓ_1 上を動き, 点 Q が ℓ_2 上を動くとする。このとき, 線分 PQ の長さが最小になる場合を考える。 点 Q が ℓ_2 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を満たす実数 t があり, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-8-t,10-2t-3-t)$ が成り立つ。したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-s-t-10,\ s-2t+3,\ -s-t-2)$$

となる。線分 PQ の長さが最小になるとき, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ が成り立つので,

$$\begin{cases}-s-t-10-s+2t-3-s-t-2=0\\ s+t+10-2s+4t-6+s+t+2=0\end{cases}$$

より

$$\begin{cases}-3s-15=0\\ 6t+6=0\end{cases}$$

すなわち, $s=-5,\ t=-1$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2-5,7+5,-1-5)=(-3,12,-6)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-8+1,\ 10+2.-3+1)=(-7,\ -12,\ 2)$ となるから, 線分 PQ の長さが最小になる P の座標は $\left(\underline{\mathbf{-3}_{セソ}},\ \underline{\mathbf{12}_{タチ}},\ \underline{\mathbf{-6}_{ツテ}}\right)$, Q の座標は $\left(\underline{\mathbf{-7}_{トナ}},\ \underline{\mathbf{12}_{ニヌ}},\ \underline{\mathbf{-2}_{ネノ}}\right)$ である。