研究：絶対値と場合分け

一次不等式

数学 I 第 1 章　第 3 節

2020/4/24

絶対値と場合分け

絶対値を含む方程式・不等式を解く場合は、以下の性質を用いる。

$$\begin{aligned} x \geqq 0 \text{ のとき} \quad |x| &= x \\ x < 0 \text{ のとき} \quad |x| &= -x \end{aligned}$$

例題

次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x-1| = 3-2x$

(2) $|2x+5| < 3-x$

例題 (1) 解答

$|x-1|=3-2x$

［1］ $x-1 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 1$ のとき

$|x-1|=x-1$ であるから、方程式は $x-1=3-2x$

これを解くと $x=\dfrac{4}{3}$、これは $x \geqq 1$ を満たす。

［2］ $x-1<0$ すなわち $x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$ であるから、方程式は $-x+1=3-2x$

これを解くと $x=2$、これは $x<1$ を満たさない。

［1］［2］ から、求める解は $\underline{\boldsymbol{x=\dfrac{4}{3}}}$

例題 (2) 解答

$|2x+5| < 3-x$

［1］ $2x+5 \geqq 0$ すなわち $x \geqq -\dfrac{5}{2}$ のとき

$|2x+5| = 2x+5$ であるから、不等式は $2x+5 < 3-x$

これを解くと $x < -\dfrac{2}{3}$、 $x \geqq -\dfrac{5}{2}$ との共通範囲は

$-\dfrac{5}{2} \leqq x < -\dfrac{2}{3}$

［2］ $2x+5 < 0$ すなわち $x < -\dfrac{5}{2}$ のとき

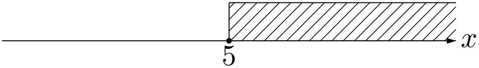
$|2x+5| = -(2x+5)$ であるから、不等式は $-2x-5 < 3-x$

これを解くと $x > -8$、$x < -\dfrac{5}{2}$ との共通範囲は $-8 < x < -\dfrac{5}{2}$

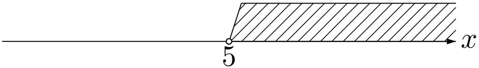
求める解は ［1］［2］ を合わせた範囲で $\underline{\boldsymbol{-8 < x < -\dfrac{2}{3}}}$

数直線での範囲の書き方

$x \geqq 5$ （イコールがある場合、点は黒丸、線は上に真っ直ぐ）



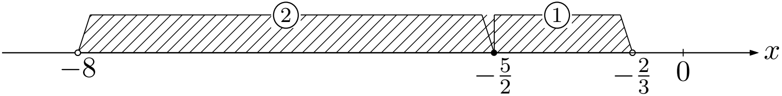
$x > 5$（イコールがない場合、点は白丸、線は斜めに真っ直ぐ）



※数直線をかくことは指示がない限りは任意。
数直線に限らず、図をかくときに定規は使わない。
大学受験では定規は持ち込み不可。

例題 (2) 数直線

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{2} \leqq x < -\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①} \\ -8 < x < -\dfrac{5}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$



$$\boldsymbol{-8 < x < -\frac{2}{3}}$$

練習問題

次の方程式、不等式を解け。

(1) $|3x+4| \geqq 5x$

(2) $2|x-1|+|x-4|=5$

(3) $3|x|+|x-5|<7$

練習問題 (1) 解答

$|3x+4| \geqq 5x$

［1］ $3x+4 \geqq 0$ すなわち $x \geqq -\dfrac{4}{3}$ のとき

$|3x+4| = 3x+4$ であるから、不等式は $3x+4 \geqq 5x$

これを解くと $x \leqq 2$、 $x \geqq -\dfrac{4}{3}$ との共通範囲は $-\dfrac{4}{3} \leqq x \leqq 2$

［2］ $3x+4 < 0$ すなわち $x < -\dfrac{4}{3}$ のとき

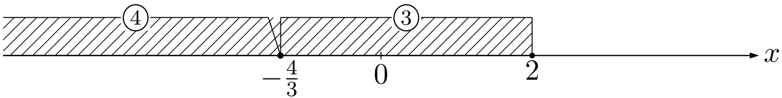
$|3x+4| = -(3x+4)$ であるから、不等式は $-3x-4 \geqq 5x$

これを解くと $x \leqq -\dfrac{1}{2}$、$x < -\dfrac{4}{3}$ との共通範囲は $x < -\dfrac{4}{3}$

求める解は［1］［2］ を合わせた範囲で $\underline{\boldsymbol{x \leqq 2}}$

練習問題 (1) 数直線

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3} \leqq x \leqq 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ x < -\dfrac{4}{3} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$



$\boldsymbol{x \leqq 2}$

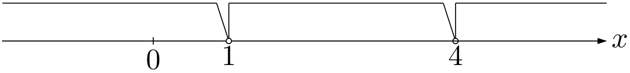
練習問題 (2) 解答の方針

$2|x-1|+|x-4|=5$

解答の方針

- $|x-1|$ の方は $x \geqq 1$ と $x<1$ の場合分け
- $|x-4|$ の方は $x \geqq 4$ と $x<4$ の場合分け
- 一見すると４通りに見えるが、これを３通りにまとめる

つまり、$x \geqq 4$ と $1 \leqq x < 4$ と $x<1$ の場合の３つ！



※この部分を解答に書く必要はありません。
　メモ的に書くか、頭の中でイメージするようにしましょう。

練習問題 (2) 解答

$2|x-1|+|x-4|=5$

［1］ $x \geqq 4$ のとき、 $2(x-1)+(x-4)=5$ より $x=\dfrac{11}{3}$

これは $x \geqq 4$ を満たさない。

［2］ $1 \leqq x < 4$ のとき、 $2(x-1)-(x-4)=5$ より $x=3$

これは $1 \leqq x < 4$ を満たす。

［3］ $x < 1$ のとき、 $-2(x-1)-(x-4)=5$ より $x=\dfrac{1}{3}$

これは $x < 1$ を満たす。

［1］［2］［3］ より $\underline{\boldsymbol{x=3,\ \dfrac{1}{3}}}$

練習問題 (3) 解答

$3|x|+|x-5|<5$

［1］ $x \geqq 5$ のとき、 $3x+(x-5)<7$ より $x<3$

$x \geqq 5$ との共通範囲はない。

［2］ $0 \leqq x<5$ のとき、 $3x-(x-5)<7$ より $x<1$

$0 \leqq x<5$ との共通範囲は $0 \leqq x<1$

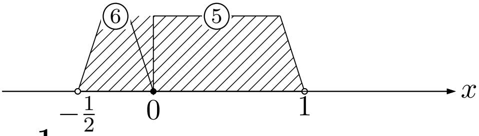
［3］ $x<0$ のとき、 $-3x-(x-5)<7$ より $x>-\dfrac{1}{2}$

$x<0$ との共通範囲は $-\dfrac{1}{2}<x<0$

求める解は［1］［2］［3］を合わせた範囲で $\underline{\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<x<1}}$

練習問題 (3) 数直線

$$\begin{cases} 0 \leqq x < 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \\ -\dfrac{1}{2} < x < 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$



$$\underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2} < x < 1}}$$

応用問題：文字係数の不等式

問題：不等式 $ax+1>x+a^2$ を解け。 a は実数の定数とする。
（解答の方針：場合分け、文字の取る値によって解の形が変わる）
解答：
整理すると $(a-1)x>a^2-1$ ゆえに $(a-1)x>(a+1)(a-1)$
［1］ $a>1$ のとき、 両辺を $(a-1)$ で割ると $x>a+1$
［2］ $a=1$ のとき、 $0\cdot x>0$ で不等式が成り立たない。
すなわち、解はない。
［3］ $a<1$ のとき、 両辺を $(a-1)$ で割ると $x<a+1$
（負の数で割っているので、不等号の向きが変わる）
以上より、 $\underline{\boldsymbol{a>1}\ \textbf{のとき}\ \boldsymbol{x>a+1},\ \boldsymbol{a=1}\ \textbf{のとき解なし},}$
$\underline{\boldsymbol{a<1}\ \textbf{のとき}\ \boldsymbol{x<a+1}}$