数学 III

式と曲線

楕円

2015/1/13

楕円の定義

平面上で、異なる 2 定点 F, F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡を **楕円（ellipse）** といい、点 F, F′ をその **焦点**という。ただし、焦点 F, F′ からの距離の和は線分 FF′ の長さより大きいものとする。

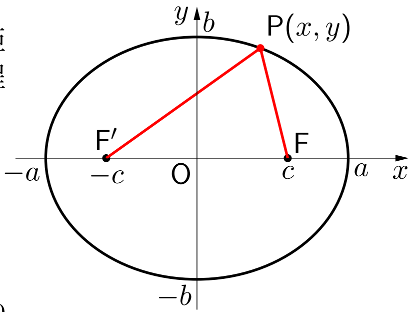
楕円の定義

平面上で、異なる 2 定点 F, F$'$ からの距離の和が一定である点 P の軌跡を **楕円（ellipse）** といい、点 F, F$'$ をその **焦点**という。
ただし、焦点 F, F$'$ からの距離の和は線分 FF$'$ の長さより大きいものとする。

2 定点 F$(c, 0)$、F$'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式は

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1} \cdots ①$$

ただし、$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b > 0$



楕円の方程式の導き方

2 定点 F$(c, 0)$、F$'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求める。
ただし、$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' > \mathrm{FF}' = 2|c|$ であるから、$a > c > 0$ とする。
楕円上の点を P$(x,\ y)$ とすると $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 2a$
よって $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$
すなわち $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$
両辺を 2 乗して整理すると $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$
再び両辺を 2 乗して整理すると $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$
$a > c$ であるから、$\sqrt{a^2 - c^2} = b$ とおくと、$a > b > 0$ で
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
ゆえに $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1} \cdots ①$

楕円の定義

逆に ① を満たす点 P$(x,\ y)$ は $\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$ を満たすから、この点は楕円上にある。
よって、① は楕円の方程式である。
① を楕円の方程式の **標準形** という。また、このとき、２つの焦点 F, F′ の座標は

$$\mathbf{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ \mathbf{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

となる。
２点 F, F′ を焦点とする楕円において、直線 FF′ のうち楕円が切り取る線分を **長軸**、長軸の垂直二等分線のうち楕円が切り取る線分を **短軸** という。また、長軸と短軸の交点を **中心**、長軸と短軸の端点を **頂点** という。

楕円の性質

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質 ※ただし、$a>b>0$

楕円の性質

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質　※ただし、$a>b>0$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $\boldsymbol{2a}$、短軸の長さは $\boldsymbol{2b}$

楕円の性質

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質　※ただし、$a>b>0$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $\boldsymbol{2a}$、短軸の長さは $\boldsymbol{2b}$

2 焦点は 2 点 $\boldsymbol{(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)}$

楕円の性質

楕円 $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ の性質　※ただし、$a>b>0$

1. 中心は **原点**、長軸の長さは $\boldsymbol{2a}$、短軸の長さは $\boldsymbol{2b}$
2. 焦点は 2 点 $\boldsymbol{(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)}$
3. 楕円は x 軸、y 軸、原点に関して対称である。

楕円の性質

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の性質　※ただし、$a>b>0$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $2a$、短軸の長さは $2b$

2 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$, $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

3 楕円は x 軸、y 軸、原点に関して対称である。

4 楕円状の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$（一定）

楕円の性質

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質　※ただし、$a>b>0$

1. 中心は **原点**、長軸の長さは $\boldsymbol{2a}$、短軸の長さは $\boldsymbol{2b}$
2. 焦点は 2 点 $\boldsymbol{(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)}$
3. 楕円は x 軸、y 軸、原点に関して対称である。
4. 楕円状の点から 2 つの焦点までの距離の和は $\boldsymbol{2a}$（一定）

例：楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ について、$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ であるから
長軸の長さは $2\cdot3=6$、短軸の長さは $2\cdot2=4$
また、$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ であるから、
焦点は 2 点 $(\sqrt{5},\ 0),\ (-\sqrt{5},\ 0)$

練習問題 4

次の楕円の長軸の長さ、短軸の長さ、焦点および頂点を求めよ。
また、その楕円の概形をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

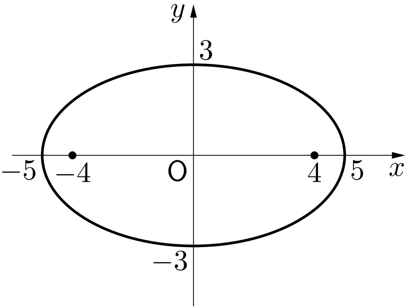
(2) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

(3) $x^2 + 4y^2 = 4$

練習問題 4 (1)：解答

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

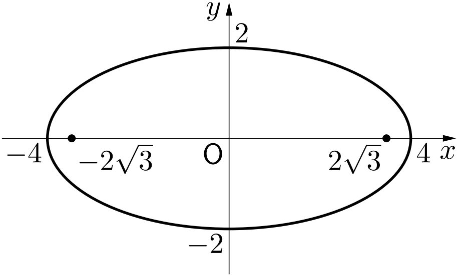
長軸の長さ 10、
短軸の長さ 6、
焦点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$
頂点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$
$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$



練習問題 4 (2)：解答

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

長軸の長さ 8、
短軸の長さ 4、
焦点 $(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$
頂点 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$
$(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$



練習問題４ (3)：解答

$$x^2+4y^2=4$$

$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と変形できる

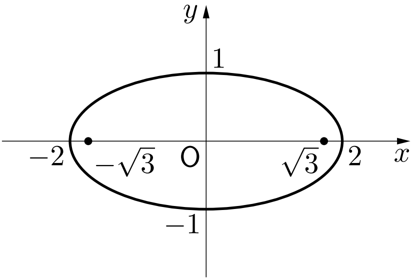
長軸の長さ 4、

短軸の長さ 2、

焦点 $(\sqrt{3},\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 0)$

頂点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$

$(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$



練習問題 5

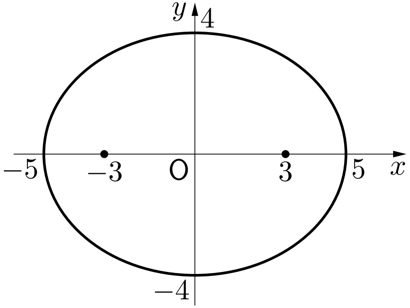
次のような楕円の方程式を求めよ。また、その楕円の概形をかけ。

(1) 焦点が 2 点 $(3,\ 0), (-3,\ 0)$、焦点からの距離の和が 10

(2) 焦点が 2 点 $(\sqrt{6},\ 0), (-\sqrt{6},\ 0)$、焦点からの距離の和が 6

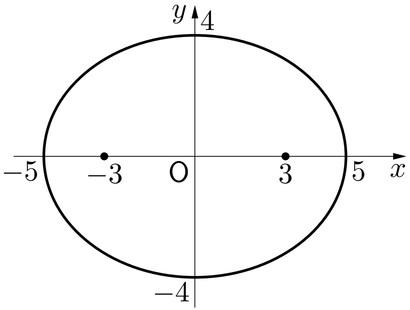
練習問題５：解答

(1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

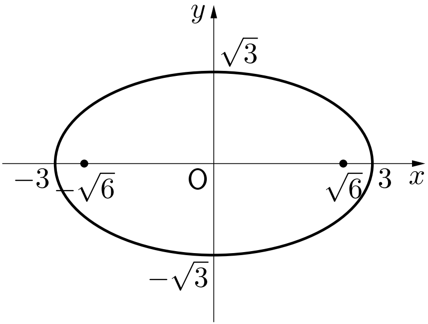


練習問題５：解答

(1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$



(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$



焦点が y 軸上にある楕円

$b > c > 0$ のとき、2 定点 F$(0,\ c)$, F$'(0,\ -c)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は、先の計算過程において、x と y を入れ替えて $\sqrt{b^2 - c^2} = a$ とおくと、$b > a > 0$ で

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \cdots ①$$

焦点が y 軸上にある楕円

$b > c > 0$ のとき、2 定点 F$(0,\ c)$, F$'(0,\ -c)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は、先の計算過程において、x と y を入れ替えて $\sqrt{b^2 - c^2} = a$ とおくと、$b > a > 0$ で

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \cdots ①$$

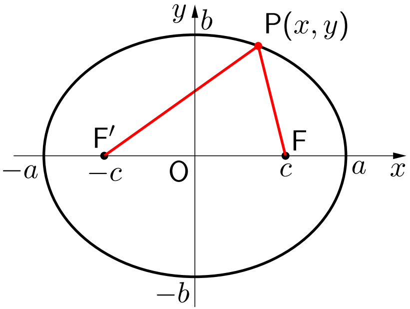
このとき、焦点 F, F$'$ の座標は、$c = \sqrt{b^2 - a^2}$ より、

$$\mathbf{F}(\mathbf{0},\ \sqrt{\boldsymbol{b^2 - a^2}}),\ \mathbf{F'}(\mathbf{0},\ -\sqrt{\boldsymbol{b^2 - a^2}})$$

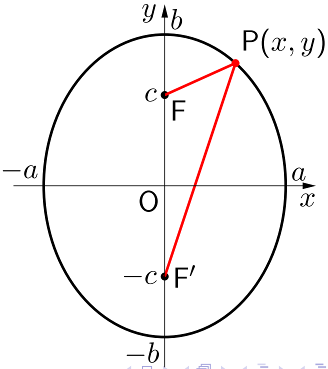
また、この楕円の長軸は y 軸上、短軸は x 軸上にあり、その長さは、それぞれ $2b$, $2a$ である。

楕円の標準形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に対して

$a>b>0$ のとき
$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},0), \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},0)$
$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$



$b>a>0$ のとき
$\mathrm{F}(0,\sqrt{b^2-a^2}), \mathrm{F}'(0,-\sqrt{b^2-a^2})$
$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2b$



焦点が y 軸上にある楕円の性質

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の性質　※ただし、$b>a>0$

焦点が y 軸上にある楕円の性質

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の性質　※ただし、$b>a>0$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $2b$、短軸の長さは $2a$

焦点が y 軸上にある楕円の性質

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の性質　※ただし、$b>a>0$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $2b$、短軸の長さは $2a$

2 焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

焦点が y 軸上にある楕円の性質

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質　※ただし、$\boldsymbol{b>a>0}$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $\boldsymbol{2b}$、短軸の長さは $\boldsymbol{2a}$

2 焦点は 2 点 $\boldsymbol{(0,\ \sqrt{b^2-a^2})}$, $\boldsymbol{(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})}$

3 楕円は x 軸、y 軸、原点に関して対称である。

焦点が y 軸上にある楕円の性質

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の性質　※ただし、$b>a>0$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $2b$、短軸の長さは $2a$

2 焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

3 楕円は x 軸、y 軸、原点に関して対称である。

4 楕円状の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2b$（一定）

焦点が y 軸上にある楕円の性質

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ の性質　※ただし、$\boldsymbol{b>a>0}$

1 中心は **原点**、長軸の長さは $\boldsymbol{2b}$、短軸の長さは $\boldsymbol{2a}$

2 焦点は 2 点 $\boldsymbol{(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ (0,\ -\sqrt{b^2-a^2})}$

3 楕円は x 軸、y 軸、原点に関して対称である。

4 楕円状の点から 2 つの焦点までの距離の和は $\boldsymbol{2b}$（一定）

例：楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ について、$\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ であるから
長軸の長さは $2\cdot2=4$、短軸の長さは $2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
また、$\sqrt{4-3}=1$ であるから、
焦点は 2 点 $(0,\ 1),\ (0,\ -1)$

練習問題 6

次の楕円の長軸の長さ、短軸の長さ、焦点及び頂点を求めよ。
また、その楕円の概形をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

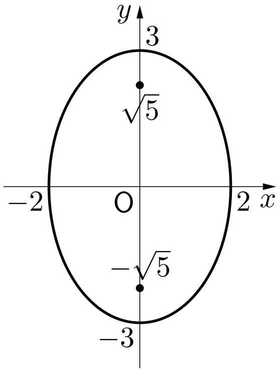
(2) $9x^2 + y^2 = 9$

(3) $9x^2 + 4y^2 = 9$

練習問題 6 (1)：解答

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

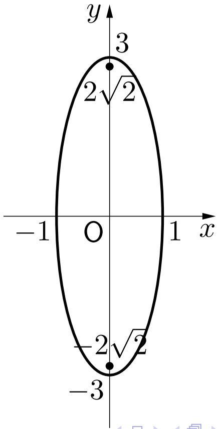
長軸の長さ 6、
短軸の長さ 4、
焦点 $(0,\ \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$
頂点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$
$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$



練習問題6 (2)：解答

$9x^2 + y^2 = 9$

$\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ と変形できる
長軸の長さ 6、
短軸の長さ 2、
焦点 $(0,\ 2\sqrt{2})$, $(0,\ -2\sqrt{2})$
頂点 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$
$(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$



練習問題 6 (3)：解答

$$9x^2 + 4y^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$$ と変形できる

長軸の長さ 3、
短軸の長さ 2、
焦点 $\left(0,\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(0,\ -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
頂点 $(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$
$\left(0,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$