数学 III

式と曲線

円と楕円・軌跡と楕円

2015/1/14

円と楕円

円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小（または拡大）してできる曲線を考える。

円上の点 Q$(s,\ t)$ が移された点を P$(x,\ y)$ とすると

$x=s,\ y=\dfrac{b}{a}t$

ゆえに $s=x,\ t=\dfrac{a}{b}y$

よって、$s^2+t^2=a^2$ から

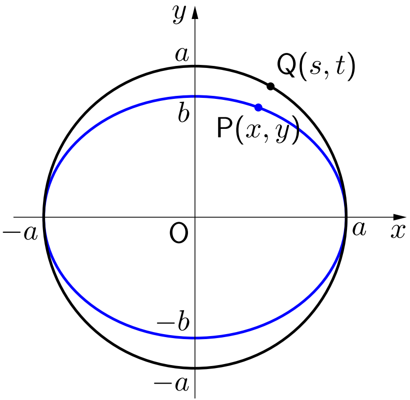
$x^2+\left(\dfrac{a}{b}y\right)^2=a^2$ すなわち、楕円

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

となる。

円と楕円の関係

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小または拡大して得られる曲線である。
※円は楕円の特別な場合と考えてもよい。



練習問題 7

$x^2 + y^2 = 9$ を (1), (2) は x 軸をもとに、(3) は y 軸をもとにして、次のように縮小または拡大すると、どのような曲線になるか。

(1) y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍

(2) y 軸方向に 2 倍

(3) x 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

練習問題７：解答

(1) $x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=9$ から $\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1}$

(2) $x^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=9$ から $\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1}$

(3) $\left(\frac{3}{4}x\right)^2+y^2=9$ から $\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1}$

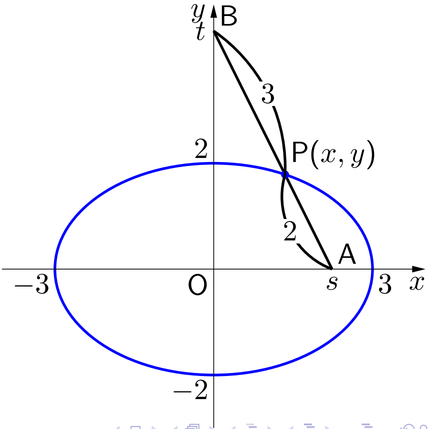
軌跡と楕円：問題

長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

軌跡と楕円：問題

長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

点 A は x 軸上、点 B は y 軸上の点であるから、 A, B の座標はそれぞれ $(s,\ 0)$, $(0,\ t)$ と表すことができる。



軌跡と楕円：解答

2 点 A, B の座標を、それぞれ $(s,\ 0),\ (0,\ t)$ とすると、$\mathrm{AB}=5$ であるから $s^2+t^2=5^2\cdots①$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると、P は線分 AB を 2 : 3 に内分するから $x=\dfrac{3}{5}s,\ y=\dfrac{2}{5}t$ よって $s=\dfrac{5}{3}x,\ t=\dfrac{5}{2}y$

これを ① に代入すると $\left(\dfrac{5}{3}x\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}y\right)^2=5^2$

すなわち $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1\cdots②$

ゆえに、条件を満たす点 P は、楕円 ② 上にある。

逆に、楕円 ② 上の任意の点 P$(x,\ y)$ は、条件を満たす。

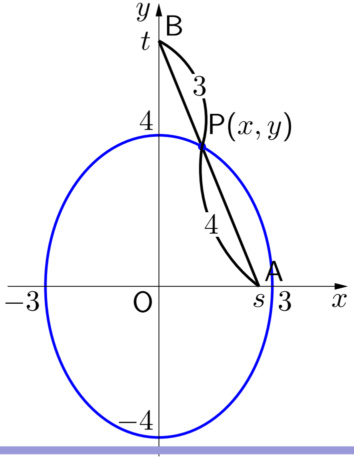
したがって、求める軌跡は、楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1}$

練習問題 8

長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を $4:3$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

練習問題 8

長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を $4:3$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。



練習問題 8 ：解答

2 点 A, B の座標を、それぞれ $(s,\ 0)$, $(0,\ t)$ とすると、$\mathrm{AB}=7$ であるから $s^2+t^2=7^2\cdots$ ①

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると、P は線分 AB を $4:3$ に内分するから $x=\dfrac{3}{7}s,\ y=\dfrac{4}{7}t$ よって $s=\dfrac{7}{3}x,\ t=\dfrac{7}{4}y$

これを ① に代入すると $\left(\dfrac{7}{3}x\right)^2+\left(\dfrac{7}{4}y\right)^2=7^2$

すなわち $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1\cdots$ ②

ゆえに、条件を満たす点 P は、楕円 ② 上にある。

逆に、楕円 ② 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は、条件を満たす。

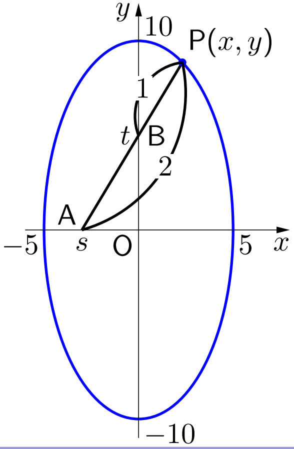
したがって、求める軌跡は、楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1}$

練習問題 9

長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を $2:1$ に外分する点 P の軌跡を求めよ。

練習問題 9

長さが 5 の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P の軌跡を求めよ。



練習問題９：解答

２点 A, B の座標を、それぞれ $(s,\ 0)$, $(0,\ t)$ とすると、$\mathrm{AB}=5$ であるから $s^2+t^2=5^2 \cdots ①$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると、P は線分 AB を $2:1$ に外分するから $x=-s,\ y=2t$ よって $s=-x,\ t=\dfrac{1}{2}y$

これを ① に代入すると $(-x)^2+\left(\dfrac{1}{2}y\right)^2=5^2$

すなわち $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2\cdot 5^2}=1 \cdots ②$

ゆえに、条件を満たす点 P は、楕円 ② 上にある。

逆に、楕円 ② 上の任意の点 P$(x,\ y)$ は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{100}=1}$