Visual Memory Chart 複素数平面 基本事項 早見チャート①

複素数とは？

虚数(Imaginary Number)　複素数(Complex Numbers)　実数(Real Numbers)

$z=a+bi$（a, bは実数）の形に表される数を複素数といい，
aを実部，bを虚部という。iは虚数単位といって$i^2=-1$になる数。
$a+bi$ の $b=0$ になった数が実数。$b\fallingdotseq 0$ の数が虚数となる。
※どんな形の複素数でも必ず$a+bi$（a, bは実数）の形に書き直すことができる。

複素数であって実数でない数

$$\text{複素数}\begin{cases}\text{実数} & a\ (b=0)\\ \text{虚数}\begin{cases}\text{純虚数} & bi\ (a=0,\ b\neq 0)\\ \text{他の虚数} & a+bi\ (a\neq 0,\ b\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

複素数が等しいとは？（複素数の相等）

$a+bi=c+di$（a, b, c, d は実数）$\Leftrightarrow$ $a=c$ かつ $b=d$

つまり，実部と虚部が等しいとき２つの複素数は等しいという。

特に，$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ かつ $b=0$

複素数の四則演算

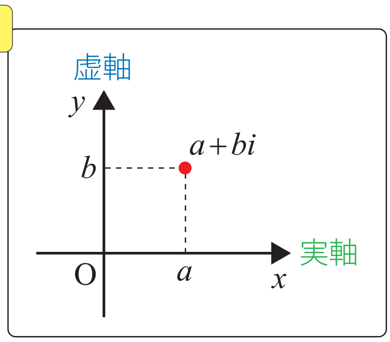
$(1+i)(x+yi)=x+yi+xi+yi^2=x+(x+y)i-y$

iを通常の文字と同じようにして扱うことでき，i^2 が出てきたらと$i^2=-1$に置き換えて計算する。
分数で分母が$a+bi$のとき，分母を実数化するために，分母・分子に分母の共役複素数$a-bi$を掛ける。

複素数の平面

xy平面の(x, y)と複素数平面の(x, yi)は1対１で対応している！

$z=a+bi$ を座標平面上の点で表すとき，この平面を複素数平面（ガウス平面）といい，x軸を実軸，y軸を虚軸という。
また，$z=a+bi$ を表す点PをP(z)，P($a+bi$)または，単に点z と表す。
実数aは，実軸上の点$(a, 0)$で，純虚数biは，点$(0, bi)$で表す。



共役（きょうやく）な複素数とは？

複素数$z=a+bi$ と共役な複素数$a-bi$ を$\overline{z}$で表す。

虚部の符号が変わる！

共役な複素数の性質（証明は基本事項チャート②参照）（z, α, β を複素数とする）

① $\overline{\text{実数}}=\text{実数}$　$\overline{3}=3$

② $\overline{\text{純虚数}}=-\text{純虚数}$　$\overline{2i}=-2i$

③ $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$

④ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

⑤ $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

⑥ $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

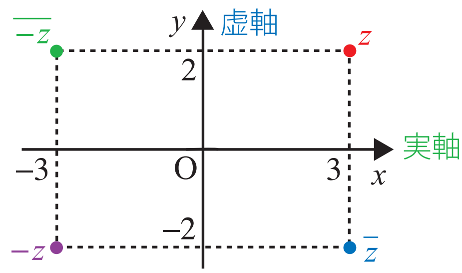
⑦ $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ $(\beta\fallingdotseq 0)$

⑧ $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$

⑨ zが実数 $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$　超重要！よく使う

⑩ zが純虚数 $\Leftrightarrow$ $z\fallingdotseq 0$ かつ $z=-\overline{z}$

例えば，$z=3+2i$ とすると，$\overline{z}$, $\overline{-z}$, $-z$ は右図のようになる。
点zと点$\overline{z}$（$3-2i$）と実軸に関して対称
点zと点$\overline{-z}$（$-3+2i$）と虚軸に関して対称
点zと点$-z$（$-3-2i$）と原点に関して対称



複素数の絶対値の性質（証明は基本事項チャート③参照）

複素数$z=a+bi$（a, bは実数）に対し，$\sqrt{a^2+b^2}$ をzの絶対値といい，$|z|$ で表す。
すなわち，$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ となる。

原点Oと点zとの距離がzの絶対値であるので，三平方の定理から$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ がいえる！

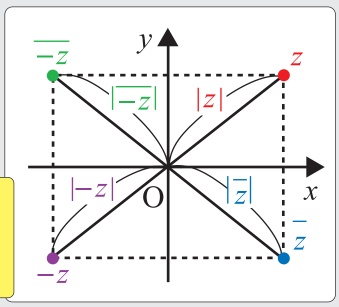
① $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

② $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|\overline{-z}|$

複素数平面上で考えれば明らか！

③ $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

Point！ 超重要！よく使う

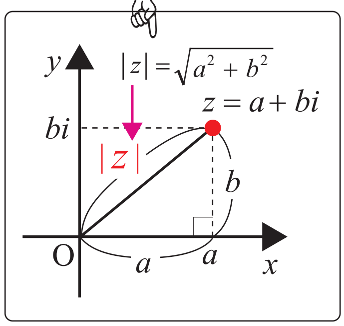


Point！ 大きさが１とあったらコレ！

④ $|z|=1$ のとき $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$

⑤ $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

⑥ $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $(\beta\fallingdotseq 0)$



Visual Memory Chart 複素数平面 基本事項 早見チャート②

共役な複素数の性質の証明（z, α, β を複素数とする）

① $\overline{\text{実数}}=\text{実数}$ ← 実数のバーはそのままバーがとれると覚える！

$\overline{3}=3$

実数は $a+bi$ の $b=0$ のときなので，実数 a の共役複素数は変わらない。

② $\overline{\text{純虚数}}=-\text{純虚数}$ ← 純虚数のバーは−をつけてバーをとると覚える！

$\overline{2i}=-2i$

純虚数は $a+bi$ の $a=0$ のときなので，純虚数 bi の共役複素数は $-bi$ となる。

③ $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$ ← バーのバーは戻ると覚える！（定義から当然！）

④ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

⑤ $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

← 足し算，引き算のバーは符号がそのままで分けられると覚える！

⑥ $\overline{\alpha\ \beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$ ← 掛け算のバーも分けられると覚える！

⑦ $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\ (\beta\neq0)$ ← 割り算のバーも分子・分母に分けられると覚える！

⑧ $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$ ← n乗はバーの外に出せると覚える！

$$\overline{\alpha^n}=\overline{\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha\cdot\alpha}_{n個}}\underset{⑥より}{=}\underbrace{\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha}\cdots\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha}}_{n個}=(\overline{\alpha})^n$$

⑨ zが実数 ⇔ $z=\overline{z}$ ← 実数 ⇒ バーはとっても同じと覚える！

⑩ zが純虚数 ⇔ $z\neq0$ かつ $z=-\overline{z}$ ← 純虚数 ⇒ バーは−をつけると覚える！

$\alpha=a+bi$, $\alpha=c+di$（a, b, c, d は実数）とする。

④の証明

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{a+bi+c+di}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i$

$\overline{●+★i}=\overline{●}+\overline{★i}=●-★i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{a+bi}+\overline{c+di}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$

$\overline{●+★i}=\overline{●}+\overline{★i}=●-★i$

∴ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ ……（証明終）

⑤の証明

$\overline{\alpha-\beta}=\overline{a+bi-(c+di)}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i$

$\overline{●+★i}=\overline{●}+\overline{★i}=●-★i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=\overline{a+bi}-\overline{c+di}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)i$

$\overline{●+★i}=\overline{●}+\overline{★i}=●-★i$

∴ $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$ ……（証明終）

⑥の証明

$\alpha\ \beta=(a+bi)(c+di)=ac+(ad+bc)i+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$i^2=-1$

よって $\overline{\alpha\ \beta}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{●+★i}=\overline{●}+\overline{★i}=●-★i$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=ac-(ad+bc)i+bdi^2=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$i^2=-1$

∴ $\overline{\alpha\ \beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$ ……（証明終）

⑦の証明

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}\cdot\frac{(c-di)}{(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$\dfrac{▲}{●+★i}$ のとき $\dfrac{●-★i}{●-★i}$ を掛けて，分母を実数化する！

よって $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\overline{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}-\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

$\overline{●+★i}=\overline{●}+\overline{★i}=●-★i$

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)}{(c-di)}\cdot\frac{(c+di)}{(c+di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

∴ $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ ……（証明終）

⑨の証明

$z=a+bi$（a, bは実数）とすると，$\overline{z}=a-bi$ ← コレは定義！

zが実数ならば $b=0$

∴ $z=a$

$\overline{z}=a$

したがって $\overline{z}=z$

$z=a+\underset{0}{bi}$

$\overline{z}=a-\underset{0}{bi}$

⇒の証明

逆に $\overline{z}=z$ ならば $a-bi=a+bi$

∴ $2bi=0$

よって $b=0$

したがって $z=a$（実数）

⇐の証明

以上より zが実数 ⇔ $z=\overline{z}$ ……（証明終）

⑩の証明

$z=a+bi$（a, bは実数）とすると，$\overline{z}=a-bi$ ← コレは定義！

zが純虚数ならば $a=0$ かつ $b\neq0$

∴ $z=bi$ よって $\overline{z}=-bi$ ← $\overline{\text{純虚数}}=-\text{純虚数}$

したがって $z\neq0$ かつ $\overline{z}=-z$

⇒の証明

逆に $z\neq0$ かつ $\overline{z}=-z$ ならば

$\overline{z}=-z$ より ← $z\neq0$の条件がないと$z=0$のとき，zは実数となる！

$a-bi=-a-bi$

∴ $2a=0$ よって $a=0$

また $z\neq0$ であるから $b\neq0$

したがって $z=bi$（純虚数）

⇐の証明

以上より zが純虚数 ⇔ $z\neq0$ かつ $z=-\overline{z}$ ……（証明終）

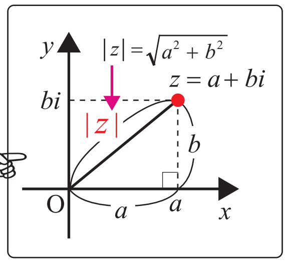
Visual Memory Chart 複素数平面 基本事項 早見チャート③

複素数の絶対値の性質と証明

複素数$z=a+bi$（a, bは実数）に対し，$\sqrt{a^2+b^2}$ をzの絶対値といい，$|z|$ で表す。

すなわち，$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$　$|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

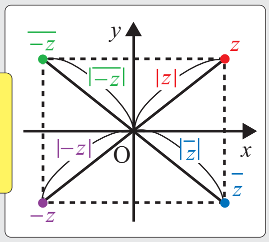
原点Oと点zとの距離がzの絶対値であるので，三平方の定理から$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ がいえる！



① $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

② $|z|=|-z|$
$=|\overline{z}|$
$=|-\overline{z}|$

複素数平面上で考えれば明らか！



③ $|z|^2=z\cdot\overline{z}$　Point！ 超重要！よく使う

④ $|z|=1$ のとき $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$　Point！ 大きさが１とあったらコレ！

⑤ $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$　絶対値の積は分けられると覚える！

⑥ $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$　$(\beta\neq 0)$　割り算の絶対値も分子・分母に分けられると覚える！

$z=a+bi$（a, bは実数）とすると $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

①の証明

$|z|=0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=0 \Leftrightarrow a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$ ……（証明終）

②の証明

$|-z|=|-a-bi|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$|\overline{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$|-\overline{z}|=|-a+bi|=\sqrt{(-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore$ $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$ ……（証明終）

③, ④の証明

$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-\underbrace{bi^2}_{i^2=-1}=a^2+b^2=|z|^2$

$\underbrace{|z|^2=1}_{\text{上記より}} \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=1$　$\overline{z}\neq 0$ より $\therefore$ $z=\dfrac{1}{\overline{z}}$

⑤の証明

$|\alpha\beta|^2=\underbrace{\alpha\beta\overline{\alpha\beta}}_{③の公式}=\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}=\underbrace{|\alpha|^2|\beta|^2}_{③の公式}=(|\alpha||\beta|)^2$

$|\alpha\beta|\geqq 0$, $|\alpha||\beta|\geqq 0$より $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ ……（証明終）

⑥の証明

$\beta\neq 0$ のとき $\beta\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\alpha$　よって $\underbrace{\left|\beta\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\right|=|\alpha|}_{両辺の絶対値をとった}$

したがって $|\beta|\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=|\alpha|$ ← 左辺を⑤の公式（積の絶対値は分けられる）

$\beta\neq 0$ であるから $|\beta|\neq 0$

$\therefore$ $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ ……（証明終）

例題１ $\sqrt{3}-i$ の絶対値の値を求めよ。

解答 $|\sqrt{3}-i|$
$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

例題２ $-2i$ の絶対値の値を求めよ。

解答 $|-2i|$ ← $|0-2i|$ と考えればよい！
$=\sqrt{(0)^2+(-2)^2}=2$

絶対値が入った式のよく使う計算

解法の手順（左のルートは軌跡問題でよく使う）

STEP1 絶対値が入った方程式の両辺を２乗する。

STEP2 $|★|^2$ を $|★|^2=★\cdot\overline{★}$ の公式より変形する。

STEP3 展開・整理する。

STEP4 $★\cdot\overline{★}$ を $★\cdot\overline{★}=|★|^2$（STEP2をもう一度）の公式より変形する。

$|★|=1$ の条件があるとき $★=\dfrac{1}{\overline{★}}$ を用いて，$★$と$\overline{★}$が入った式を$★$のみ（１文字）の式にする。

問題例 $|\alpha|=|\beta|=|\alpha+\beta|=1$ のとき $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ の値を求めよ。

解答

$|\alpha|^2=|\beta|^2=1$ より

$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$ ← ③の公式

$\alpha\neq 0$ より $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ ……①　同様に $\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$ ……②

$|\alpha+\beta|^2=1$ より

$|\alpha+\beta|^2=\underbrace{(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}}_{③の公式}=(\alpha+\beta)\underbrace{(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}_{\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}}=1$

これに①, ②を代入して

$(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=1 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2=\alpha\beta$

$\therefore$ $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ ……（答え）

Visual Memory Chart 複素数平面 基本事項 早見チャート④

複素数平面のポイント

POINT① 複素数の表し方には，①z（点と見る），② $a+bi$（成分に分解）③極形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の３つの表し方がある。問題に応じて，どの形を用いて計算するかが１つの鍵となる。

問題例　z が $|z|=2$ をみたす虚数のとき，$z+\dfrac{c}{z}$（cは実数）が実数になるようにcの値を求めよ。

特に，積・商・n乗計算（ド・モアブルの定理の利用）をする場合，有効となる！

複素数zのまま計算を行う

解答1

$z+\dfrac{c}{z}$ は実数より

$\overline{z+\dfrac{c}{z}}=z+\dfrac{c}{z}$　← zが実数 ⇔ $z=\overline{z}$

⇔ $\overline{z}+\dfrac{c}{\overline{z}}=z+\dfrac{c}{z}$　← $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

⇔ $z-\overline{z}=\dfrac{c(z-\overline{z})}{z\overline{z}}$

ここで，z は虚数より

$z\neq\overline{z}$ なので $z-\overline{z}\neq 0$

よって $1=\dfrac{c}{z\overline{z}}$　← 両辺を$z-\overline{z}$で割った

⇔ $z\overline{z}=c$

⇔ $|z|^2=c$　← $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

$|z|=2$ より

$c=4$

$a+bi$ の形にして計算を行う

解答2

$z=a+bi$（a，bは実数）とおくと

$z+\dfrac{c}{z}=a+bi+\dfrac{c}{a+bi}$　← 代入した

$=a+bi+\dfrac{c}{a+bi}\cdot\dfrac{a-bi}{a-bi}$

$=a+bi+\dfrac{c(a-bi)}{a^2+b^2}$　← 分母を実数化

$=a+\dfrac{ca}{a^2+b^2}+\dfrac{b(a^2+b^2-c)}{a^2+b^2}i$　← $a+bi$ の形に整理

これが実数より

$\dfrac{b(a^2+b^2-c)}{a^2+b^2}=0$ ……※　← $a+bi$ の$b=0$の数が実数

$|z|=2$より $\sqrt{a^2+b^2}=2$　← 絶対値の定義

∴ $a^2+b^2=4$ を※に代入し

$b(4-c)=0$

また，zは虚数で，$b\neq0$より　← $a+bi$ の$b\neq0$の数が虚数

$c=4$

極形式にして計算を行う

解答3

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると　← $|z|=2$より

$\dfrac{1}{z}=\{2(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{-1}$　　$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=r^n\cos n\theta+i\sin n\theta$

$=\dfrac{1}{2}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

$=\dfrac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$　← $\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$z+\dfrac{c}{z}=2(\cos\theta+i\sin\theta)+c\cdot\dfrac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$=\left(2+\dfrac{c}{2}\right)\cos\theta+\left(2-\dfrac{c}{2}\right)i\sin\theta$

これが実数となるので

$\left(2-\dfrac{c}{2}\right)=0$　← $a+bi$ の$b=0$の数が実数

⇔ $4-c=0$

よって $c=4$

POINT② 図形的な捉え方は，主に，①ベクトルと同様に捉える，②変換（操作）と捉えるの２通りある。

ベクトルと捉える

複素数を足したり，引いたりすることが平行移動を表す。

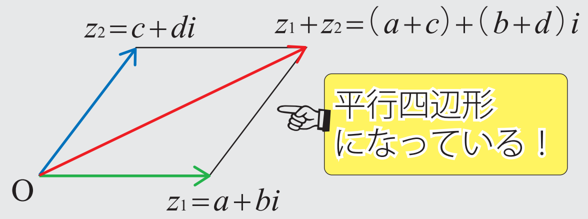
内積はダメ

和と差と実数倍に関係するベクトルの公式は複素数の場合も全く同じように使うことができる。

$\alpha=a+bi$（a，bは実数）とすると
点$z+\alpha$ は点zを α だけ平行移動

複素数の加法の図形的意味

複素数の加法（減法）はベクトルと同様に考えることができ，各成分同士を足せばよい。



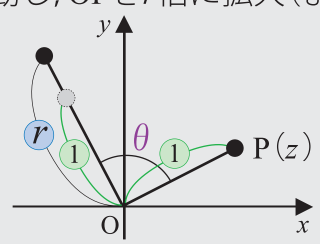
変換（操作）⇒回転・拡大（縮小）と捉える

複素数を掛けたり，割ったりすることが回転・拡大（縮小）を表す。

$\beta=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると
点 $\beta\times z$は点zを原点のまわりに θ だけ回転移動

複素数の乗法の図形的意味

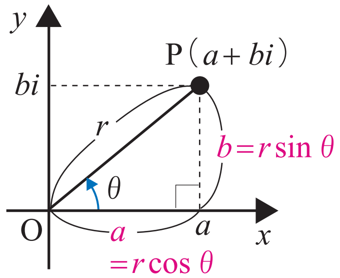
複素数平面上で，原点O(0)，P(z)，とするとき，点 $z\times r(\cos\theta+i\sin\theta)$ は，点Pを原点Oの周りに θ だけ回転移動し，OPをr倍に拡大（または縮小）した点となる。



Visual Memory Chart 複素数平面 基本事項 早見チャート⑤

極形式とは？

複素数平面上で，0でない複素数$z=a+bi$……①を表す点をPとし，
$\mathrm{OP}=r$，にOPが実軸の正の部分となす角をθとすると，
$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$であるから，①に代入して
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $[r>0]$　これを複素数zの**極形式**という。
絶対値 $|z|=r$，θをzの**偏角**といい $\arg z$（アーギュメントz）と表す。
特に，$z=0$のとき，偏角が定まらないので，その極形式は考えない。



Point！ 極形式 ⇒ $z=$（正の実数）$(\cos\theta+i\sin\theta)$
ココは同じ　ココは＋

複素数の積と商

複素数の積と商を極形式で表すと次のようになる。
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$のとき

掛け算は正の方向(反時計回り)に回転！

①：積z_1z_2は $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$ となる。
絶対値　$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$　　偏角　$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

②：商$\dfrac{z_1}{z_2}$は $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$ となる。
ただし，$z_2\neq0$
絶対値　$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$　　偏角　$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$

割り算は負の方向(時計回り)に回転！

①の証明

$z_1z_2=\{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\}\{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\}$
$=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
$=r_1r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$
$\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$
$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ ■

三角関数の加法定理

②の絶対値の証明

①の絶対値にz_1の代わりに$\dfrac{z_1}{z_2}$を代入すると

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right||z_2|$　すなわち　$|z_1|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right||z_2|$

$|z_2|\neq0$ より　$\therefore\ \dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ ■

複素数の極形式の表し方

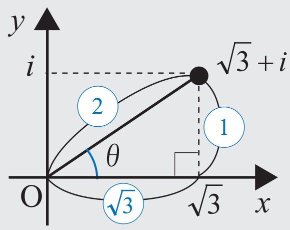
解法の手順

STEP1 複素数を$a+bi$の形で表し，絶対値rの値を求める。

STEP2 式全体をSTEP1で求めたrでくくる。

STEP3 $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ となるθを求める。

複素数平面上で図示して考えてもよい！



例題　$\sqrt{3}+i$のとき
絶対値は
$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$
偏角θは，辺の比を考え
$\theta=30°$
$\therefore\ 2(\cos30°+i\sin30°)$

次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角θは$0°\leqq<360°$とする。

例題1　$\sqrt{3}-i$

解答　$\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$ ← 絶対値rを求める

$\sqrt{3}-i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$ ← rでくくる

$=2(\cos330°+i\sin330°)$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ となるθを求める

例題2　3

解答　$3+0\times i$と考えると，絶対値は3

$3=3\times(\cos0°+i\sin0°)$

$\cos\theta=1$，$\sin\theta=0$ となるθを求める

例題3　$2i$

解答　$0+2i$と考えると，絶対値は2

$2i=2\times(\cos90°+i\sin90°)$

$\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$ となるθを求める

例題4　$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$

分数の場合は，分子と分母をそれぞれ極形式で表して計算する！

解答　$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$において

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ ← 絶対値rを求める

$1+\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ← rでくくる

$=2(\cos60°+i\sin60°)$

$1+i$ において

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ← 絶対値rを求める

$=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ ← rでくくる

$=\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)$

$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\dfrac{2(\cos60°+i\sin60°)}{\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\{\cos(60°-45°)+i\sin(60°-45°)\}$ ← $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$=\sqrt{2}\cos15°+i\sin15°$

例題5　$\sin\theta+i\cos\theta$

解答　$\sqrt{(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}=1$ ← 絶対値rを求める

$\sin\theta+i\cos\theta$

$=\cos(90°-\theta)+i\sin(90°-\theta)$ ← cos★＋i sin★ となるような変換を考える！

例題6　$2\cos\theta-2i\sin\theta=2\cos\theta+i(-2\sin\theta)$

解答　$\sqrt{(2\cos\theta)^2+(-2\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=2$ ← 絶対値rを求める

$2\cos\theta-2i\sin\theta$

$=2\{\cos\theta+i(-\sin\theta)\}$ ← rでくくる

$=2\{\cos(-\theta)+i(\sin(-\theta)\}$ ← cos★＋i sin★ となるような変換を考える！

Visual Memory Chart 複素数平面 基本事項 早見チャート⑥

ド・モアブルの定理

—のときでもOK！

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$　nは整数

また

n乗がn倍に！

$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$となる。

Point! ド・モアブルの定理は，n乗計算やn乗根問題のとき，有効となる！（下記参照）

nが自然数の場合の証明

$n=1$のとき，明らかに成り立つ。
$n=k$のとき，成り立つと仮定すると，
$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = (\cos k\theta + i\sin k\theta)$
$n=k+1$のとき，
$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)$
$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$ ← 三角関数の加法定理
よって，$n=k+1$のときも成り立つ。

$(a+bi)^n$ の計算

解法の手順

STEP1 ()の中の複素数を極形式（$z=\cos\theta + i\sin\theta$）で表す。

STEP2 ド・モアブルの定理を利用する。
$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

絶対値がn乗，偏角θがn倍

例題 $(1+\sqrt{3}i)^8$ を計算せよ。

解答 $1+\sqrt{3}i$ の絶対値は $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$1+\sqrt{3}i = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$

$(1+\sqrt{3}i)^8$

$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$= 2^8\{\cos(60°\times 8) + i\sin(60°\times 8)\}$

$= 256\cos 480° + i\sin 480°$

$= 256\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -128+128\sqrt{3}i$ ・・・（答え）

1のn乗根問題

自然数nに対して，$z^n=1$を満たす複素数zのことを1のn乗根という。
αのn乗根 ⇒ n乗するとαになる数。すなわち，$z^n=\alpha$の解。

自然数nに対して，$z^n=1$を満たす複素数は

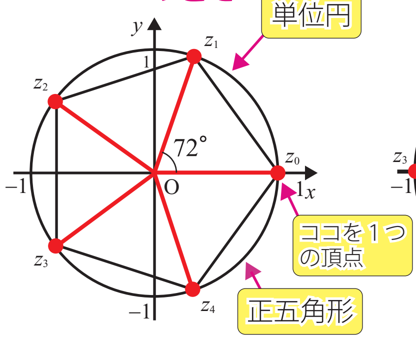
$$z_k = \cos\left(\frac{360°}{n}\times k\right) + i\sin\left(\frac{360°}{n}\times k\right)$$

$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots n-1)$

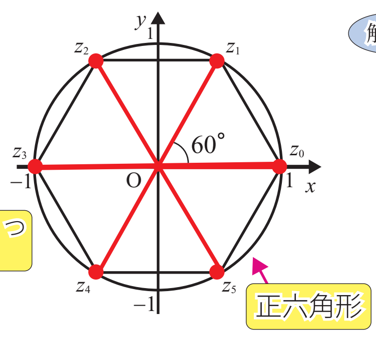
$z^n=1$ から，$|z|=1$
$z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$とおくと，ド・モアブルの定理より
$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
$z^n=1$ より，$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)=1$
$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \cos 0° + i\sin 0°$
両辺の絶対値と偏角を比較して
$r^n=1$　$r>0$より，$r=1$
$n\theta = 0° + 360°\times k$（$k$は整数）より　$\theta = \dfrac{360°}{n}\times k$

$n\geqq 3$のとき，複素数平面上で，z_kを表す点は，点1を1つの頂点として，単位円に内接する正n角形の各頂点となる。

$z^3=1$のとき



$z^6=1$のとき



$z^n=1$ の解

解法の手順

STEP1 $z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく。

STEP2 問題の方程式$z^n=1$の両辺を極形式で表す。
左辺のn乗の計算は，ド・モアブルの定理を利用する。右辺は，$1=\cos 0° + i\sin 0°$ となる。

STEP3 両辺の絶対値と偏角を比較する。

例題 方程式 $z^3=1$ を解け。

解答 $z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$r>0$とおくと

$z^3 = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

また $1=\cos 0° + i\sin 0°$ より

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$r^3=1$，$3\theta = 0° + 360°\times k$（$k$は整数）

$r>0$ より $r=1$　また，$\theta = 120°\times k$

よって $z=\cos(120°\times k) + i\sin(120°\times k)$

$0° < \theta < 360°$ の範囲で考えると $k=0, 1, 2$

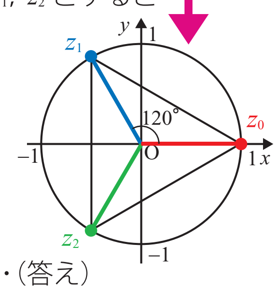
$k=0, 1, 2$ のときのzをそれぞれz_0，z_1，z_2とすると

$n=3$より，解は，単位円に内接する正三角形の各頂点となる！

$z_0 = \cos 0° + i\sin 0° = 1$

$z_1 = \cos 120° + i\sin 120° = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = \cos 240° + i\sin 240° = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$



∴ 解は $z=1,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ・・・（答え）