数学 III

式と曲線

放物線

2014/12/27

放物線の定義

平面上で、定点 F と、F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点 P の軌跡を **放物線（parabola）** といい、点 F をその **焦点**、直線 ℓ を **準線** という。

放物線の定義

平面上で、定点 F と、F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点 P の軌跡を **放物線（parabola）** といい、点 F をその **焦点**、直線 ℓ を **準線** という。

$p \neq 0$ とする。点 F$(p,\ 0)$ を焦点とし、直線 $x = -p$ を準線 ℓ とする放物線の方程式を求める。

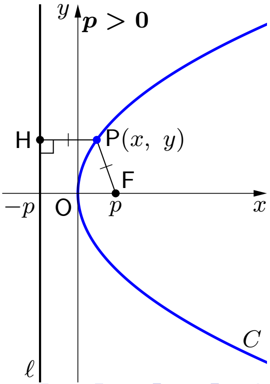
放物線 C 上の点を P$(x,\ y)$ とし、P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると $\mathrm{PF} = \mathrm{PH}$

すなわち $\mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$

よって、$(x-p)^2 + y^2 = \{x - (-p)\}^2$

整理して

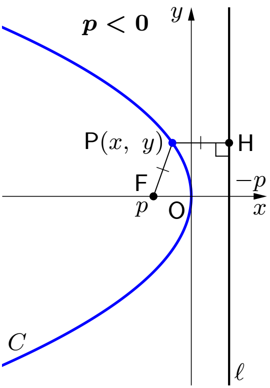
$\boldsymbol{y^2 = 4px} \cdots ①$



放物線の定義

逆に ① を満たす点 P$(x,\ y)$ は $\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ を満たすから、この点は C 上にある。
よって、① は放物線 C の方程式である。

① を放物線の方程式の **標準形** という。放物線の焦点を通り、準線に垂直な直線を、放物線の **軸** といい、軸と放物線の交点を、放物線の **頂点** という。
放物線は、その軸に対して対称である。



放物線の性質

放物線の**一般形** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
放物線の**基本形** $\boldsymbol{y = a(x-p)^2 + q}$
※この基本形を標準形ということもある。
放物線 $\boldsymbol{y^2 = 4px}$ の性質
※ただし、$p \neq 0$

放物線の性質

放物線の**一般形** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
放物線の**基本形** $\boldsymbol{y = a(x - p)^2 + q}$
※この基本形を標準形ということもある。
放物線 $\boldsymbol{y^2 = 4px}$ の性質
※ただし、$p \neq 0$

1 頂点は **原点**、焦点は **点** $\boldsymbol{(p,\ 0)}$、準線は **直線** $\boldsymbol{x = -p}$

放物線の性質

放物線の**一般形** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
放物線の**基本形** $\boldsymbol{y = a(x - p)^2 + q}$
※この基本形を標準形ということもある。

放物線 $\boldsymbol{y^2 = 4px}$ の性質

※ただし、$p \neq 0$

1 頂点は **原点**、焦点は **点** $\boldsymbol{(p,\ 0)}$、準線は **直線** $\boldsymbol{x = -p}$

2 軸は x 軸で、放物線は軸に関して対称である。

放物線の性質

放物線の**一般形** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
放物線の**基本形** $\boldsymbol{y = a(x-p)^2 + q}$
※この基本形を標準形ということもある。

放物線 $\boldsymbol{y^2 = 4px}$ の性質

※ただし、$p \neq 0$

1 頂点は **原点**、焦点は **点** $\boldsymbol{(p,\ 0)}$、準線は **直線** $\boldsymbol{x = -p}$

2 軸は x 軸で、放物線は軸に関して対称である。

例：焦点が $(3,\ 0)$、準線が直線 $x = -3$ である放物線の方程式は
$y^2 = 4 \cdot 3x$ すなわち $y^2 = 12x$

練習問題 1

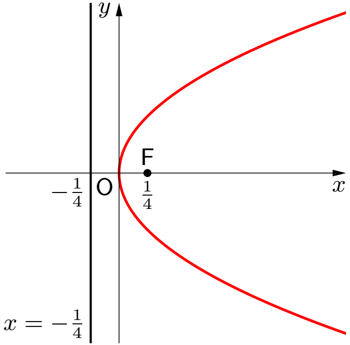
次の放物線の焦点と準線を求めよ。
また、その放物線の概形をかけ。

(1) $y^2 = x$

(2) $y^2 = -2x$

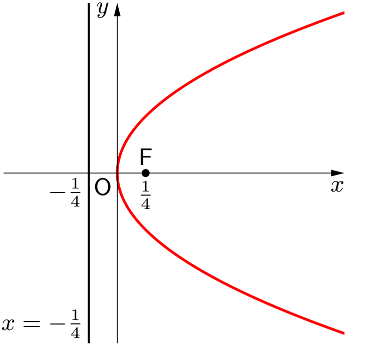
練習問題 1 ：解答

(1) 焦点 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, 準線 $x = -\frac{1}{4}$

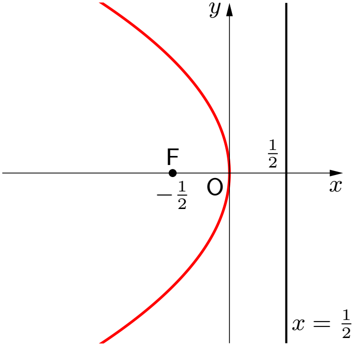


練習問題１：解答

(1) 焦点 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, 準線 $x = -\frac{1}{4}$



(2) 焦点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 準線 $x = \frac{1}{2}$



練習問題 2

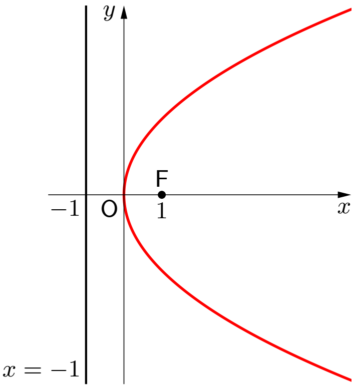
次のような放物線の方程式を求めよ。
また、その放物線の概形をかけ。

(1) 焦点が点 $(1,\ 0)$、準線が直線 $x = -1$

(2) 焦点が点 $(-2,\ 0)$、準線が直線 $x = 2$

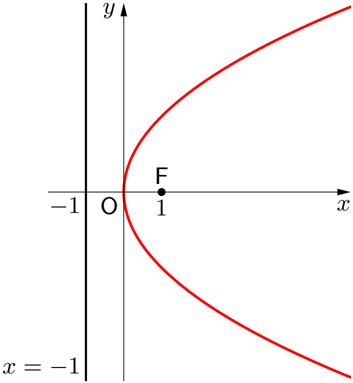
練習問題 2 ：解答

(1) $y^2 = 4x$

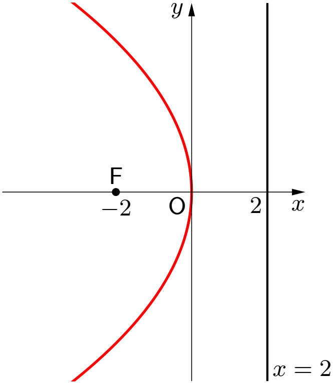


練習問題 2 ：解答

(1) $y^2 = 4x$



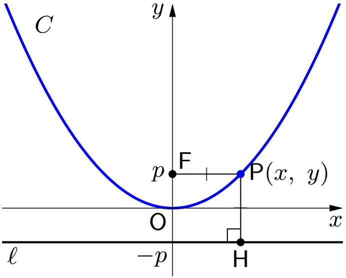
(2) $y^2 = -8x$



y 軸を軸とする放物線

$p \neq 0$ のとき、点 F$(0,\ p)$ を焦点とし、直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は、先の計算過程おいて x と y を入れ替えると $\boldsymbol{x^2 = 4py}$ となる。

$a \neq 0$ のとき、方程式 $y = ax^2$ は、$x^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{4a} y$ と変形されるから、放物線 $y = ax^2$ の焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$、準線は直線 $x = -\dfrac{1}{4a}$ である。



練習問題 3

放物線 $y = x^2$ の焦点と準線を求めよ。

練習問題 3

放物線 $y = x^2$ の焦点と準線を求めよ。

（答）

焦点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$

準線 $x = -\dfrac{1}{4}$